

МЧС РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Уральский институт государственной противопожарной службы
Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны,
чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам

Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность

Екатеринбург
2020

Высшая математика [Текст] : методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам. Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность. Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность / сост. С. А. Худякова, А. В. Шпаньков, Л. В. Якупова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВО Уральский институт ГПС МЧС России, 2020. – 103 с.

Составители: Худякова С. А., начальник кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России, кандидат педагогических наук;

Шпаньков А. В., старший преподаватель кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России;

Якупова Л. В., преподаватель кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России.

Рецензент: Пешков А.В., начальник учебно-методического отдела Уральского института ГПС МЧС России, кандидат технических наук.

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам по дисциплине «Высшая математика» предназначены для курсантов, студентов и слушателей, обучающихся по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность, направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность.

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании кафедры математики и информатики от 13.08.2020 г. протокол № 1.

© Худякова С. А., Шпаньков А. В., Якупова Л. В. 2020
© ФГБОУ ВО «Уральский институт ГПС МЧС России», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Глава I. Требования к результатам освоения дисциплины 5
Глава II. Структура дисциплины 6
Глава III. Рекомендации по темам дисциплины 7
§ 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии 7
§ 2. Основы математического анализа 22
§ 3. Комплексные числа 47
§ 4. Функция двух переменных 57
§ 5. Дифференциальные уравнения 62
§ 6. Ряды 77
§ 7. Основы теории вероятностей и математической статистики 89
Литература 101

Введение

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам по дисциплине «Высшая математика» предназначены для обучающихся по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность, направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность. Рекомендации составлены в соответствии с требованиями Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность и направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, согласно рабочей программе дисциплины «Высшая математика».

Целями освоения учебной дисциплины «Высшая математика» являются:

– формирование у обучающихся системы теоретических знаний по основным разделам высшей математики в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта;

– развитие у обучающихся способности выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в процессе решения профессионально-ориентированных задач, привлекать для их решения соответствующий математический аппарат;

– формирование готовности к саморазвитию и самообразованию.

Для достижения данных целей предусматривается решение следующих основных задач:

– освоение системы базовых знаний высшей математики;

– развитие у обучаемых умения строить математические модели типовых задач в процессе их решения;

– развитие способностей организовывать свою работу и работать самостоятельно;

– развитие способности к познавательной деятельности: к абстрагированию, анализу и синтезу, критическому мышлению, обобщению, принятию нестандартных решений, разрешению проблемных ситуаций, резюмированию и аргументированному отстаиванию своих решений;

– формирование сознания необходимости, потребности и способности учиться, воспитание чувства ответственности за результаты своего труда.

Глава I. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основы высшей математики;
- принципы сбора, отбора и обобщения информации;
- методики системного подхода для решения профессиональных задач.

Уметь:

- анализировать и систематизировать разнородные данные, оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности;
- решать стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования.

Владеть навыками:

- научного поиска и практической работы с информационными источниками;
- теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности; методами принятия решений.

Глава II. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц или 252 часа. В таблицах №№ 1-2 представлены распределение тем и формы аттестации по семестрам для очной формы обучения и годам для заочной формы обучения.

Распределение тем дисциплины «Высшая математика» по очной форме обучения

Таблица № 1

№ п/п	Наименование тем
1	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии
2	Основы математического анализа
3	Комплексные числа
Промежуточная аттестация – зачет	
4	Функция двух переменных
5	Дифференциальные уравнения
Промежуточная аттестация – зачет	
6	Ряды
7	Основы теории вероятностей и математической статистики
Итоговый контроль – экзамен	

Распределение тем дисциплины «Высшая математика» по заочной форме обучения

Таблица № 2

№ п/п	Наименование тем
1	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии
2	Математический анализ
3	Комплексные числа
4	Функция двух переменных
5	Дифференциальные уравнения
Промежуточная аттестация – зачет	
6	Ряды
7	Основы теории вероятностей и математической статистики
Итоговый контроль – экзамен	

Глава III. Рекомендации по темам дисциплины

В данном разделе методических рекомендаций приведены вопросы, типовые задания (задачи) по изучаемым темам, указаны ссылки на литературу, которые помогут более качественно подготовиться к различным видам аттестации в соответствии с действующей рабочей программой дисциплины «Высшая математика».

Экзамены и зачеты по дисциплине «Высшая математика» проводятся в традиционной форме (теоретические вопросы и практические задания (задачи), а также могут проводиться в форме письменной контрольной работы или в тестовой форме.

§ 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Литература: основная: [1-4], [6]; дополнительная: [10]; методические разработки кафедры: [12-14].

ТЕМА 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы; определение определителей второго порядка и третьего порядка; понятие невырожденной матрицы.
2. Способы вычисления определителей второго и третьего порядка.
3. Действия над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на действительное число, умножение матриц, транспонирование матрицы.
4. Понятие обратной матрицы, формула обратной матрицы.
5. Определение системы линейных алгебраических уравнений, решения системы; понятие совместной и несовместной системы, определенной и неопределенной системы линейных уравнений.
6. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
7. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
8. Способы задания прямой линии на плоскости. Виды уравнений прямой.
9. Нахождение угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.
10. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Классификация линий второго порядка на плоскости.
11. Понятия окружности, эллипса, гиперболы и параболы. Их канонические уравнения и построение в системе координат. Геометрические характеристики эллипса, гиперболы и параболы.

Примерные практические задания (задачи)

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11;$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение:

1 способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot (-4) - (-4 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2) =$$

$$= 0 + 0 + 12 - (0 + 0 + 12) = 12 - 12 = 0;$$

2 способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2) + 1 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot (-4)) + 0 = -12 + 12 = 0.$$

2. Найти сумму, разность и произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 & -1+1 \\ 4+(-1) & 2+3 & 0+2 \\ 5+2 & -1+(-1) & 3+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 2 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 2-2 & -1-1\\ 4-(-1) & 2-3 & 0-2\\ 5-2 & -1-(-1) & 3-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 5 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 2 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+(-1)\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot3+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot0\\ 4\cdot3+2\cdot(-1)+0\cdot2 & 4\cdot2+2\cdot3+0\cdot(-1) & 4\cdot1+2\cdot2+0\cdot0\\ 5\cdot3+(-1)\cdot(-1)+3\cdot2 & 5\cdot2+(-1)\cdot3+3\cdot(-1) & 5\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 5\\ 10 & 14 & 8\\ 22 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

3. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}$, сделать проверку.

Решение:

определитель матрицы равен:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -3\end{vmatrix}=0-8+0-0-0+9=1.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы равны:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & -3\end{vmatrix}=0;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{vmatrix}=3;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ -4 & -3\end{vmatrix}=1;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-6;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 2\\ -4 & 9 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 2\\ -4 & 9 & -3\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 2\\ -4 & 9 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot3 & 0\cdot3+1\cdot0+0\cdot(-4) & 0\cdot2+1\cdot0+0\cdot(-3)\\ 3\cdot0+(-6)\cdot1+2\cdot3 & 3\cdot3+(-6)\cdot0+2\cdot(-4) & 3\cdot2+(-6)\cdot0+2\cdot(-3)\\ -4\cdot0+9\cdot1+(-3)\cdot3 & -4\cdot3+9\cdot0+(-3)\cdot(-4) & -4\cdot2+9\cdot0+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 2\\ -4 & 9 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot0+3\cdot3+2\cdot(-4) & 0\cdot1+3\cdot(-6)+2\cdot9 & 0\cdot0+3\cdot2+2\cdot(-3)\\ 1\cdot0+0\cdot3+0\cdot(-4) & 1\cdot1+0\cdot(-6)+0\cdot9 & 1\cdot0+0\cdot2+0\cdot(-3)\\ 3\cdot0+(-4)\cdot3+(-3)\cdot(-4) & 3\cdot1+(-4)\cdot(-6)+(-3)\cdot9 & 3\cdot0+(-4)\cdot2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}-x+y-z=0;\\ 3x-4y+3z=-1;\\ -2y-3z=-8.\end{cases}$ (методами Гаусса, Крамера и матричным).

Решение:

а) метод Гаусса.

Расширенная матрица системы имеет вид: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -4 & 3 & -1\\ 0 & -2 & -3 & -8\end{array}\right)$.

Произведем преобразование расширенной матрицы:

элементы первой строки умножим на (– 1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 3 & -1\\ 0 & -2 & -3 & -8\end{array}\right)$;

элементы первой строки умножим на (–3) и прибавим ко второй строке, результат действия запишем на место второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right);$$

элементы второй строки умножим на (–1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array}\right)$;

элементы второй строки умножим на (2) и прибавим к третьей строке, результат действия запишем на место третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right);$$

элементы третьей строки разделим на (–3): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$;

элементы третьей строки умножим на (–1) и прибавим к первой строке, результат действия запишем на место первой строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right);$$

элементы второй строки прибавим к первой строке, результат действия запишем на место первой строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right);$$

в итоге получаем: $\begin{cases} x = -1; \\ y = 1; \\ z = 2. \end{cases}$

Проверка: $\begin{cases} 1+1-2=0; \\ -3-4+6=-1; \\ -2-6=-8. \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0; \\ -1=-1; \\ -8=-8; \end{cases}$

b) метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -12+6+0-(0+6-9) = -6+3 = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 24 - (-32 + 0 + 3) = -26 + 29 = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 24 + 0 - (0 + 24 + 0) = 21 - 24 = -3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -32 + 0 + 0 - (0 - 2 - 24) = -32 + 26 = -6;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1;\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Проверка: $\begin{cases} 1 + 1 - 2 = 0; \\ -3 - 4 + 6 = -1; \\ -2 - 6 = -8. \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 0; \\ -1 = -1; \\ -8 = -8; \end{cases}$

c) матричный метод.

Представим данную систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$, $X = A^{-1} \cdot B$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$, A^{-1} – обратная матрица матрицы A.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 6 + 0 - (0 + 6 - 9) = -6 + 3 = -3 \neq 0;$$

алгебраические дополнения элементов матрицы равны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 18; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1;$$

обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}18 & 5 & -1\\ 9 & 3 & 0\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ -3 & -1 & 0\\ 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix};$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-6 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ -3 & -1 & 0\\ 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -8\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}18 & 5 & -1\\ 9 & 3 & 0\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -8\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}18\cdot 0+5\cdot(-1)+(-1)\cdot(-8)\\ 9\cdot 0+3\cdot(-1)+0\cdot(-8)\\ -6\cdot 0+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-8)\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -3\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix};$$

в итоге получаем: $\begin{cases}x=-1;\\ y=1;\\ z=2.\end{cases}$

Проверка: $\begin{cases}1+1-2=0;\\ -3-4+6=-1;\\ -2-6=-8.\end{cases}$ $\begin{cases}0=0;\\ -1=-1;\\ -8=-8.\end{cases}$

5. Даны точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$, $C(3;-1)$. Составьте уравнения:
   a) стороны *AB* треугольника *ABC*: общее, каноническое, в отрезках, с угловым коэффициентом, параметрическое;
   b) высоты *CH* и медианы *CD*: общее, каноническое, в отрезках, с угловым коэффициентом, параметрическое;
   c) найти расстояние от точки $A(1;2)$ до прямой *BC*.

   Решение:

   a) $A(1;2)$, $B(0;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(0-1;-1-2)=(-1;-3)$.

   Каноническое уравнение стороны *AB* имеет вид: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-3}$, где $(x;y)$ – координаты текущей точки, расположенной на прямой *AB*, $(x-1;y-2)$ – координаты вектора, расположенного на прямой *AB*, $(-1;-3)$ – координаты направляющего вектора прямой *AB*.

Общее уравнение стороны AB получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$$-3\cdot(x-1)=-1\cdot(y-2),$$

$$-3\cdot(x-1)=-1\cdot(y-2),$$

$$-3x+3=-y+2,$$

$$-3x+y+1=0,$$

$$3x-y-1=0.$$

Уравнение в отрезках стороны AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования:

$$3x-y=1,$$

$$\frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{-1}=1.$$

Уравнение с угловым коэффициентом стороны AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $y=3x-1$.

Уравнение в параметрической форме стороны AB получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=t;\\[2mm] \dfrac{y-2}{-3}=t.\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}x=-t+1;\\ y=-3t+2.\end{cases}$$

b) $A(1;2)$, $B(0;-1)$, $C(3;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-3)$.

Для составления общего уравнения высоты CH используем условие перпендикулярности векторов, т. е. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$: $-1\cdot(x-3)-3\cdot(y+1)=0$, где $\overrightarrow{AB}=(-1;-3)$, $\overrightarrow{CH}=(x-3;y+1)$.

$-x+3-3y-3=0$, $-x-3y=0$, $x+3y=0$ – общее уравнение высоты CH.

Каноническое уравнение высоты CH имеет вид: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{-1}$, где $(x;y)$ – координаты точки H, $(x-3;y+1)$ – координаты вектора $\overrightarrow{CH}$, $(3;-1)$ – координаты направляющего вектора прямой CH, полученные из координат вектора $\overrightarrow{AB}=(-1;-3)$ при перестановке координат местами и изменив, знак только у одной координаты.

Уравнение в отрезках высоты CH не существует, так как прямая проходит через начало координат и не отсекает отрезки на координатных осях.

Уравнение с угловым коэффициентом высоты CH получим из общего уравнения, выполнив преобразования:

$3y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$.

Уравнение в параметрической форме высоты *CH* получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} = t; \\ \frac{y+1}{-1} = t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3t+3; \\ y = -t-1. \end{cases}$$

Составим уравнение медианы *CD*.

Найдем координаты середины отрезка *AB*: $D = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{2-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Каноническое уравнение медианы *CD* имеет вид: $\frac{x-3}{2,5} = \frac{y+1}{-1,5}$, где $(x; y)$ – координаты текущей точки прямой *CD*, $(x-3; y+1)$ – координаты вектора, лежащего на прямой *CD*, $(2,5; -1,5)$ – координаты направляющего вектора прямой *CD*, полученные из координат вектора $\overrightarrow{CD} = (3-0,5; -1-0,5) = (2,5; -1,5)$.

Общее уравнение медианы *CD* получим из канонического уравнения, выполнив преобразования: $-1,5 \cdot (x-3) = 2,5(y+1)$ (умножим полученное уравнение на «– 2»).

$3 \cdot (x-3) = -5(y+1)$, $3x-9 = -5y-5$, $3x+5y-4 = 0$ – общее уравнение медианы *CD*.

Уравнение в отрезках медианы *CD* получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $3x+5y = 4$, $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{\frac{4}{5}} = 1$.

Уравнение с угловым коэффициентом медианы *CD* получим из общего уравнения, выполнив преобразования:

$5y = -3x+4$, $y = -0,6x+0,8$.

Уравнение в параметрической форме медианы *CD* получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2,5} = t; \\ \frac{y+1}{-1,5} = t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2,5t+3; \\ y = -1,5t-1. \end{cases}$$

c) $A(1;2),\ B(0;-1),\ C(3;-1).$

Для нахождения расстояния от точки $A(1;2)$ до прямой *BC* воспользуемся формулой: $d=\dfrac{|Ax_A+By_A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $Ax+By+C=0$ – уравнение прямой *BC*, $(x_A;y_A)$ – координаты точки *A*, $(A;B)$ – координаты нормального вектора прямой *BC*.

Составим общее уравнение прямой *BC*.

Каноническое уравнение прямой *BC* имеет вид: $\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y+1}{-1+1}$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{0}$, где $(x;y)$ – координаты текущей точки прямой *BC*, $(x;y+1)$ – координаты вектора, лежащего на прямой *BC*, $(3;0)$ – координаты направляющего вектора прямой *BC*, полученные из координат вектора $\vec{BC}=(3-0;-1-(-1))=(3;0)$.

Общее уравнение прямой *BC* получим из канонического уравнения, выполнив преобразования: $0\cdot x=3\cdot(y+1)$, $3\cdot(y+1)=0$ (разделим полученное уравнение на «3»).

$y+1=0$ – общее уравнение прямой *BC*. Координаты нормального вектора прямой *BC* найдем из общего уравнения прямой *BC*: $(0;1)=(A;B)$.

$$d=\frac{|Ax_A+By_A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|0\cdot1+1\cdot2+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{1}}=3.$$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M* (2; 5) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+6}{5}$.

Решение:

Из уравнения $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+6}{5}$ мы видим, что $\vec{a}=(3;5)$ – *направляющий вектор исходной и искомой прямой.*

Так как по условию задачи прямая проходит через точку *M* (2; 5), то *каноническое уравнение искомой прямой* имеет вид: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{5}$.

Уравнение в параметрической форме искомой прямой получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{5}=t,\qquad \begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=t,\\ \dfrac{y-5}{5}=t.\end{cases}$$

$\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 5t + 5. \end{cases}$ – *параметрическое уравнение искомой прямой.*

Общее уравнение искомой прямой получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{5}$,

$5x - 10 = 3y - 15$,

$5x - 3y + 5 = 0$ – *общее уравнение искомой прямой.*

Уравнение с угловым коэффициентом искомой прямой получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $5x - 3y + 5 = 0$, $3y = 5x + 5$, $y = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$ – *уравнение искомой прямой с угловым коэффициентом.*

Уравнение в отрезках искомой прямой получим из общего уравнения, выполнив преобразования:

$5x - 3y + 5 = 0$,

$5x - 3y = -5$,

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$ – *уравнение искомой прямой в отрезках.*

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (2; 5) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+6}{5}$.

Решение:

Из уравнения $\frac{x-1}{3} = \frac{y+6}{5}$ мы видим, что $\vec{a} = (3;5)$ – *направляющий вектор исходной прямой и нормальный вектор искомой прямой.*

$\vec{d} = (-5;3)$ – *направляющий вектор искомой прямой.*

Так как по условию задачи прямая проходит через точку M (2; 5), то *каноническое уравнение искомой прямой* имеет вид: $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-5}{3}$.

Уравнение в параметрической форме искомой прямой получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-5}{3} = t$, $\qquad \begin{cases} \frac{x-2}{-5} = t, \\ \frac{y-5}{3} = t. \end{cases}$

$\begin{cases} x = -5t + 2, \\ y = 3t + 5. \end{cases}$ – *параметрическое уравнение искомой прямой.*

Общее уравнение искомой прямой получим из канонического уравнения, выполнив преобразования:

$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-5}{3}$,

$3x-6=-5y+25,\ 3x+5y-31=0$ – *общее уравнение искомой прямой.*

Уравнение с угловым коэффициентом искомой прямой получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $3x+5y-31=0$, $5y=-3x+31,\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{31}{5}$ – *уравнение искомой прямой с угловым коэффициентом.*

Уравнение в отрезках искомой прямой получим из общего уравнения, выполнив преобразования:

$3x+5y-31=0,\ 3x+5y=31,$

$\frac{x}{\frac{31}{3}}+\frac{y}{\frac{31}{5}}=1$ – *уравнение искомой прямой в отрезках.*

8. По уравнению кривой второго порядка определить ее тип, записать основные геометрические характеристики:

a) $x^2+4y^2-2x+56y+181=0$; *b*) $x=2-\sqrt{6-2y}$;

c) $4x+10+2x^2-8y^2=0$; *d*) $x^2+y^2+6x+2y-15=0$.

a) $x^2+4y^2-2x+56y+181=0$.

Решение:

$x^2+4y^2-2x+56y+181=0,$

$\left(x^2-2x+1\right)-1+4\left(y^2+14y+49\right)-196+181=0,$

$(x-1)^2+4(y+7)^2-16=0,\quad (x-1)^2+4(y+7)^2=16,$

$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+7)^2}{4}=1,$

$\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y+7)^2}{2^2}=1$ – *каноническое уравнение эллипса.*

Геометрические характеристики:

$(1;-7)$ – центр симметрии, $a=4$ – большая полуось, $b=2$ – малая полуось, $A_1(5;-7)$, $A_2(-3;-7)$, $B_1(1;-5)$ и $B_2(1;-9)$ – вершины, $|A_1A_2|=8$ – большая ось, $|B_1B_2|=4$ – малая ось, $c=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $F_1\left(1+2\sqrt{3};-7\right)$, $F_2\left(1-2\sqrt{3};-7\right)$ – фокусы, $|F_1F_2|=4\sqrt{3}$ – фокальное расстояние, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ – эксцентриситет, $x=1\pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$ – директрисы.

На рисунке 1 изображен эллипс и его геометрические характеристики.

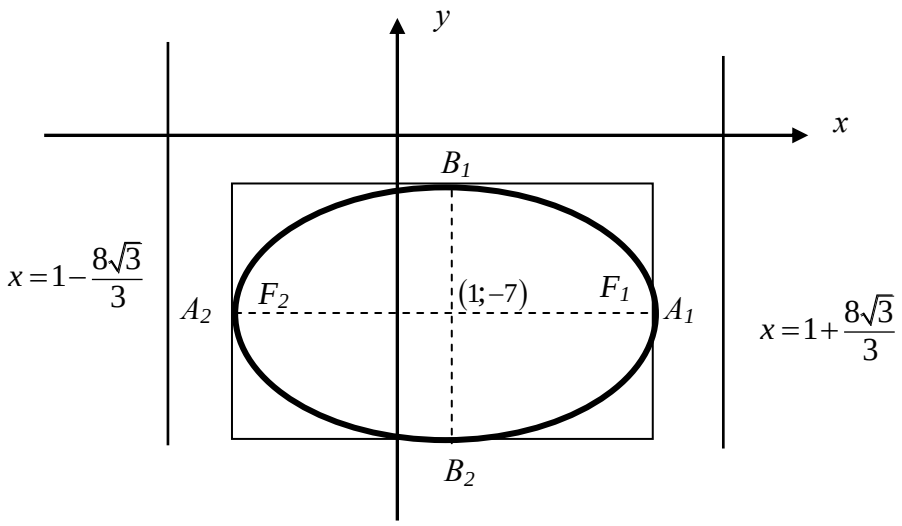


Рисунок 1

b) $x=2-\sqrt{6-2y}$.

Область определения функции:

$\sqrt{6-2y}=2-x$, $\begin{cases}6-2y\ge 0,\\ 2-x\ge 0.\end{cases}$ $\begin{cases}-2y\ge -6,\\ -x\ge -2.\end{cases}$ $\begin{cases}y\le 3,\\ x\le 2.\end{cases}$

Преобразуем выражение $\sqrt{6-2y}=2-x$:

$6-2y=(2-x)^2$ $y=-\frac{1}{2}(2-x)^2+3$, $y=-\frac{1}{2}\left(4-4x+x^2\right)+3$,

$y=-2+2x-\frac{1}{2}x^2+3$, $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ – *общее уравнение параболы*.

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$,

$-2y=x^2-4x-2$,

$x^2-4x+4-4-2=-2y$,

$(x-2)^2=-2y+6$,

$(x-2)^2=-2(y-3)$ – *каноническое уравнение параболы*.

Геометрические характеристики:

$(2;3)$ – вершина параболы, ветвь параболы направлены вниз, $x=2$ – ось симметрии, фокус параболы имеет координаты $(2;2)$, $\varepsilon=1$ – эксцентриситет, $y=4$ – директриса.

Координаты точки пересечения с осью *Oy*: $x=0$, $y=1$.

Координаты точек пересечения с осью *Ox*: $y=0$, $-\frac{1}{2}x^2+2x+1=0$,

$x_1=\frac{-2+\sqrt{4+2}}{-1}=\frac{-2+\sqrt{6}}{-1}=2-\sqrt{6}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{4+2}}{-1}=\frac{-2-\sqrt{6}}{-1}=2+\sqrt{6}$.

На рисунке 2 изображена часть параболы и ее геометрические характеристики.

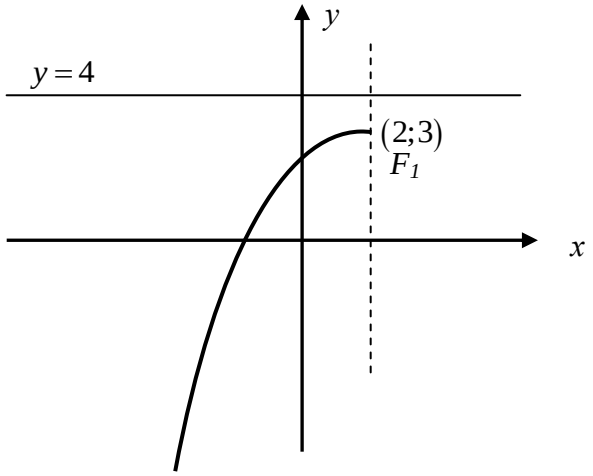


Рисунок 2

c) $4x+10+2x^2-8y^2=0.$

$\left(2x^2+4x\right)-8y^2+10=0,$

$2\left(x^2+2x+1\right)-2-8y^2+10=0,$

$2\left(x+1\right)^2-8y^2+8=0,$

$2\left(x+1\right)^2-8y^2=-8,$

$\frac{2\left(x+1\right)^2}{-8}-\frac{8y^2}{-8}=1, \qquad -\frac{\left(x+1\right)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,$

$-\frac{\left(x+1\right)^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ – *каноническое уравнение гиперболы.*

Геометрические характеристики:

$(-1;0)$ – центр симметрии, $a=2$ – мнимая полуось, $b=1$ – действительная полуось, $A_1\left(1;0\right)$, $A_2\left(-3;0\right)$ – мнимые вершины, и $B_1\left(-1;1\right)$, $B_2\left(-1;-1\right)$ – действительные вершины, $\left|A_1A_2\right|=4$ – мнимая ось, $\left|B_1B_2\right|=2$ – мнимая ось, $c=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=$, $F_1\left(-1;\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(-1;-\sqrt{5}\right)$ – фокусы, $\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{5}$ – фокальное расстояние, $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$ – эксцентриситет, $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ – директрисы, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ – уравнения асимптот.

На рисунке 3 изображена гипербола и ее геометрические характеристики.

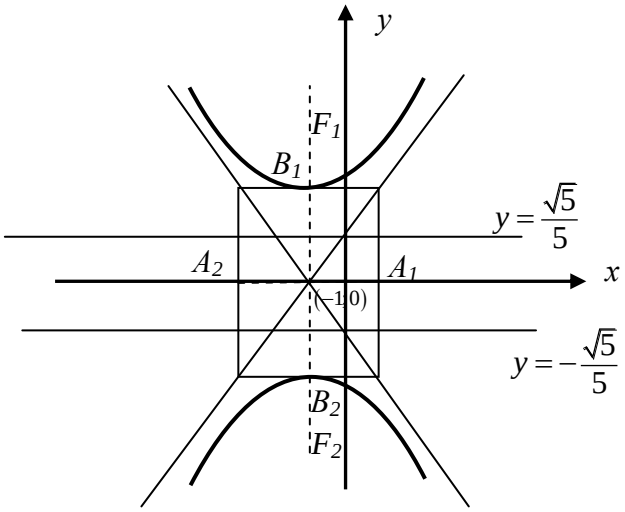


Рисунок 3

d) $x^2+y^2+6x+2y-15=0$.

$x^2+y^2+6x+2y-15=0,$

$\left(x^2+6x\right)+\left(y^2+2y\right)-15=0,$

$\left(x^2+6x+9\right)-9+\left(y^2+2y+1\right)-1-15=0,$

$(x+3)^2+(y+1)^2-25=0,$

$(x+3)^2+(y+1)^2=25$ – *каноническое уравнение окружности*.

Геометрические характеристики: $(-3;-1)$ – координаты центра, $R=5$ – радиус, $d=10$ – диаметр, $\varepsilon=0$ – эксцентриситет.

На рисунке 4 изображена окружность и ее геометрические характеристики.

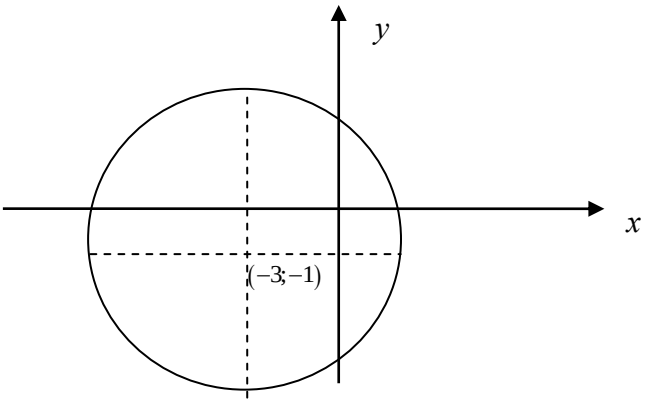


Рисунок 4

§ 2. Основы математического анализа

Литература: основная: [1-4], [6]; дополнительная: [10]; методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение функции. Определение числовой последовательности.
2. Определение предела функции при $x \to x_0$. Определение односторонних пределов функции в точке. Определение предела функции при $x \to \infty$.
3. Определение бесконечно большой функции, бесконечно малой функции. Эквивалентные бесконечно малые функции.
4. Предел суммы, произведения и частного функций.
5. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
6. Определение функции, непрерывной в точке, непрерывной на отрезке.
7. Определение точки разрыва, классификация точек разрыва.
8. Определение производной функции.
9. Правила и формулы дифференцирования.
10. Правило дифференцирования сложной функции.
11. Нахождение производной степенно-показательной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная от функции заданной параметрически.
12. Определение и уравнение касательной к графику функции. Определение и уравнение нормали к графику функции.
13. Определение второй производной, производных высших порядков.
14. Определение дифференциала функции. Формулы дифференциала суммы, произведения и частного функций.
15. Теоремы Лопиталя для раскрытия неопределенностей при вычислении пределов.
16. Алгоритм полного исследования функции.
17. Определение первообразной функции. Определение неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла.
18. Табличный метод интегрирования неопределенного интеграла.
19. Алгоритм метода интегрирования подстановкой.
20. Интегрирование по частям неопределенного интеграла.
21. Определение рациональной функции, интегрирование простейших рациональных дробей, общее правило интегрирования дробно-рациональных функций.
22. Интегрирование тригонометрических функций.
23. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла.

24. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Основные методы вычисления определенных интегралов.
25. Приложение определенного интеграла для вычисления площади плоской фигуры, объема тела вращения.

Типовые практические задания (задачи)

1. Написать первых пять членов последовательности, заданных ее n – *ым* членом: $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

   Решение:

   Первый член последовательности равен $x_1 = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$.

   Второй член последовательности равен $x_2 = \dfrac{2^2+1}{2} = 2,5$.

   Третий член последовательности равен $x_3 = \dfrac{3^2+1}{3} = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3}$.

   Четвертый член последовательности равен $x_4 = \dfrac{4^2+1}{4} = \dfrac{17}{4} = 4,25$.

   Пятый член последовательности равен $x_5 = \dfrac{5^2+1}{5} = \dfrac{26}{5} = 5,2$.

2. Зная несколько первых членов последовательности записать формулу их общего члена: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \ldots$.

   Решение:

   Общий член последовательности равен $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

3. Является ли последовательность $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ ограниченной?

   Решение:

   Первый член последовательности равен $x_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$.

   Второй член последовательности равен $x_2 = \dfrac{2+1}{2} = 1\dfrac{1}{2}$.

   Третий член последовательности равен $x_3 = \dfrac{3+1}{3} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

Общий член последовательности равен $x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Максимальное значение члены последовательности достигают при $n = 1$ и равно 2. При увеличении номера все члены последовательности приближаются к 1.

В итоге получаем, последовательность ограничена, т. е. все члены последовательности находятся в диапазоне: $1 < \frac{n+1}{n} \le 2$.

4. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n+1}{2}$ является возрастающей.

Решение:

Найдем разность $x_n - x_{n+1}$:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1+1}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{n+2}{2} = \frac{n+1-n-2}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

следовательно, $x_n - x_{n+1} < 0$, $x_n < x_{n+1}$. Последовательность является возрастающей так как последующий член последовательности больше предыдущего при любом натуральном номере *n*. Что и требовалось доказать

5. Вычислить пределы функций:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x^3 + 1}{x^4 - 5x^3 + 1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x^3 + 3}{x^2 - 5x^4 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} + \frac{3}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - 5 - \frac{1}{x^4}} =$$

$$= \left[\frac{0+0+0}{0-5-0}\right] = 0;$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^2 - 2x^3 - 1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^2 - 2x^3 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}} =$$

$$= \left[\frac{1+0+0}{0-0-0}\right] = \infty;$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^4+1}{x^4+x^3+x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x^4+1}{x^4+x^3+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^4}-\frac{2x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\left[\frac{0-2+0}{1+0+0}\right]=-2;$$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{1}=4;$$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x}{\sin2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{\sin2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{6x\cdot2x\sin6x}{6x\cdot2x\cdot\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{6x}{2x}=$$

$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to0}3=3;$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}\cdot x\cdot\frac{-1}{x+1}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{1}}=e^{-1};$$

k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{2}{3(1+1)}=\frac{1}{3};$$

m) $\lim\limits_{x\to -7}(15+2x)^{\frac{5}{x+7}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to -7}(15+2x)^{\frac{5}{x+7}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to -7}(1+2(7+x))^{\frac{5}{x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to -7}(1+2(7+x))^{\frac{1}{2(x+7)}\cdot\frac{5}{x+7}\cdot\frac{2(x+7)}{1}}=\lim_{x\to -7}e^{10};$$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sin(1-x)}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(1-x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\sin(1-x)}=\lim_{x-1\to 0}\frac{-(1-x)\left(x^2+x+1\right)}{\sin(1-x)}=$$

$$=-\lim_{x-1\to 0}\frac{(1-x)}{\sin(1-x)}\cdot\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=-1\cdot\left(1^2+1+1\right)=-3.$$

6. Исследовать функции на непрерывность на всей числовой оси. Найти и классифицировать точки разрыва, если они существуют. Построить график функции (см. рис. 5).

a) $y=\begin{cases}-2x, & x<0;\\ \sqrt{4+x^2}, & x\geq 0.\end{cases}$

Решение:

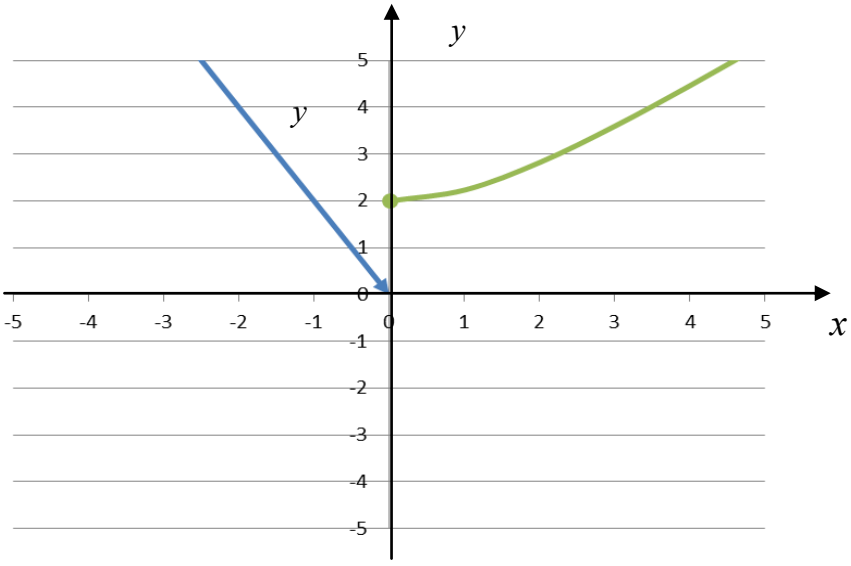


Рисунок 5

$\lim\limits_{x\to 0-0}(-2x)=\left[-2(0-0)=-0+0\right]=0$ – левосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{4+x^2}=\left[\sqrt{4+(0+0)^2}=\sqrt{4}\right]=2$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4+x^2}=2$ – предел функции в точке $x=0$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой и функция в точке существует, следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода (точка – скачка).

$$b)\ y=\begin{cases}-|x+1|, & x<-1;\\ x^2+2, & -1\le x<1;\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Решение:

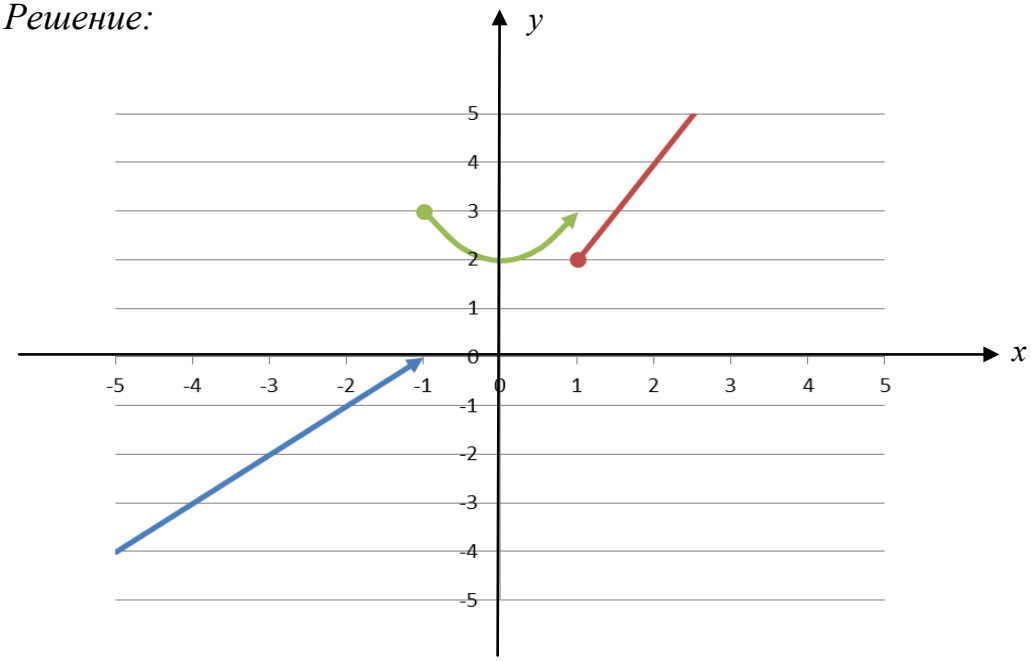


Рисунок 6

$\lim\limits_{x\to -1-0}(-|x+1|)=\left[-|-1-0+1|=-|0-0|\right]=0$ – левосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to -1+0}\left(x^2+2\right)=\left[(-1+0)^2+2\right]=3$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+2\right)=\left[(-1)^2+2\right]=3$ – предел функции в точке $x=-1$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой и функция в точке существует, следовательно, точка $x=-1$ является точкой разрыва первого рода (точка – скачка) (см. рис. 6).

$\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2+2\right)=\left[(1+0)^2+2\right]=3$ – левосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 1+0}(2x)=\left[2(1+0)\right]=2$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 1}(2x)=[2\cdot 1]=2$ – предел функции в точке $x=1$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой и функция в точке существует, следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода (точка – скачка) (см. рис. 6).

$$c)\ y=\begin{cases}\sqrt{-x-3}, & x\le -3;\\ \dfrac{1}{1-x}, & -3<x<1;\\ -2, & x\ge 1.\end{cases}$$

Решение:

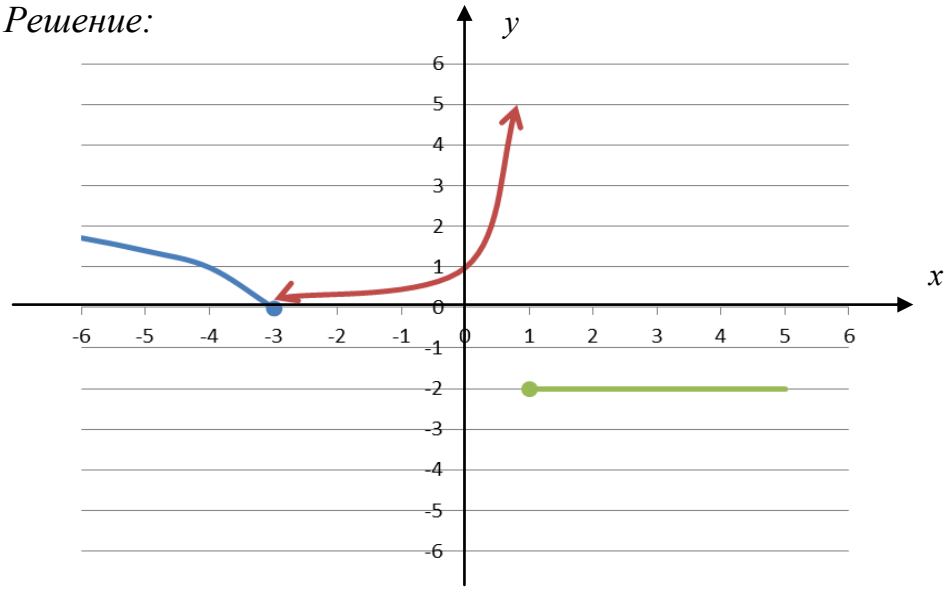


Рисунок 7

$\lim\limits_{x\to -3-0}\sqrt{-x-3}=\left[\sqrt{-(-3-0)-3}=\sqrt{3+0-3}\right]=0$ – левосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to -3+0}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\left[\dfrac{1}{1-(-3+0)}=\dfrac{1}{1+3-0}\right]=\dfrac{1}{4}$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{-x-3}=\left[\sqrt{-(-3)-3}=\sqrt{3-3}\right]=0$ – предел функции в точке $x=-3$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой и функция в точке существует, следовательно, точка $x=-3$ является точкой разрыва первого рода (точка – скачка) (см. рис. 7).

$\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\left[\dfrac{1}{1-(1-0)}=\dfrac{1}{1-1+0}=\dfrac{1}{0+0}\right]=+\infty$ – левосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 1+0}(-2)=-2$ – правосторонний предел,

$\lim\limits_{x\to 1}(-2)=-2$ – предел функции в точке $x=1$.

Так как левосторонний предел равен бесконечности, следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 7).

7. Найти производную функции $y = f(x)$ первого и второго порядка:

a) $y = 6x^4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt{2}x$.

Решение:

$y' = 24x^3 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \sqrt{2}$, $y'' = 72x^2 + \frac{4}{x^3} - \frac{18}{x^4}$.

b) $y = \sqrt[4]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 2ctg\,x$.

Решение:

$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{\sin^2 x}$, $y' = -\frac{3}{16\sqrt[4]{x^7}} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x^8}} + \frac{4\cos x}{\sin^3 x}$.

c) $y = 5^x \cdot \arcsin x + \pi$.

Решение:

$$y' = 5^x \cdot \ln 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = 5^x \cdot \ln^2 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x \cdot \ln 5\sqrt{1-x^2} + \frac{5^x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= 5^x \cdot \ln^2 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x \cdot \ln 5\left(1-x^2\right) + 5^x \cdot x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

d) $y = \frac{4\log_5 x}{2x^3 + x^2}$.

Решение:

$$y' = \frac{\frac{4\left(2x^3 + x^2\right)}{x\ln 5} - 4\log_5 x\left(6x^2 + 2x\right)}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{\left(2x^4 + x^3\right)\ln 5} - \frac{\left(24x^2 + 8x\right)\log_5 x}{\left(2x^3 + x^2\right)^2},$$

$$y'' = \frac{-4\left(8x^3 + 3x^2\right)}{\left(2x^4 + x^3\right)^2 \ln 5} -$$

$$-\frac{\left(\left(48x+8\right)\log_5 x+\left(\frac{24x^2+8x}{x\ln 5}\right)\right)\left(2x^3+x^2\right)^2-\left(24x^2+8x\right)\log_5 x\cdot 2\left(6x^2+2x\right)}{\left(2x^3+x^2\right)^4}.$$

8. Найти производную сложной функции $y=f(g(x))$:

a) $y=\sqrt{\cos x}$.

Решение:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\left(\cos x\right)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

b) $y=2^{tgx}$.

Решение:

$$y'=2^{tgx}\cdot\ln 2\cdot\left(tgx\right)'=\frac{2^{tgx}\cdot\ln 2}{\cos^2 x}.$$

c) $y=\arccos^2\left(e^x\right)$.

Решение:

$$y'=2\arccos\left(e^x\right)\cdot\left(\arccos\left(e^x\right)\right)'=2\arccos\left(e^x\right)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\cdot\left(e^x\right)'=$$

$$=\frac{-2\cdot\left(e^x\right)\arccos\left(e^x\right)'}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}.$$

d) $y=\left(\sin 2x\right)\cdot\log_2 x$.

Решение:

$$y'=\left(\sin 2x\right)'\cdot\log_2 x+\left(\sin 2x\right)\cdot\left(\log_2 x\right)'=$$

$$=\cos 2x\left(2x\right)'\cdot\log_2 x+\left(\sin 2x\right)\cdot\frac{1}{x\ln 2}=2\cos 2x\cdot\log_2 x+\frac{\sin 2x}{x\ln 2}.$$

e) $y=\sqrt{arcctg\,x}$.

Решение:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{arcctg\,x}}\cdot\left(arcctg\,x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{arcctg\,x}}\cdot\frac{-1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{-1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{arcctg\,x}}.$$

f) $y = \dfrac{\ln 2x}{\cos x}$.

Решение:

$$y' = \frac{\left(\ln 2x\right)' \cdot \cos x - \ln 2x \cdot \left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2x}\left(2x\right)' \cdot \cos x + \ln 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot \cos x + \ln 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x}.$$

9. Найти производную функции $y = f(x)$ с помощью логарифмического дифференцирования:

a) $y = x^{\ln\left(\cos x\right)}$.

Решение:

$$\ln y = \ln x^{\ln\left(\cos x\right)},\ \ln y = \ln(\cos x) \cdot \ln x,$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\ln(\cos x)\right)' \cdot \ln x + \ln(\cos x) \cdot \left(\ln x\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot \ln x + \ln(\cos x) \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = \left(-tgx \cdot \ln x + \frac{\ln(\cos x)}{x}\right) \cdot y, \qquad y' = \left(-tgx \cdot \ln x + \frac{\ln(\cos x)}{x}\right) \cdot x^{\ln\left(\cos x\right)}.$$

b) $y = \left(x + x^2\right)^x$.

Решение:

$$\ln y = \ln\left(x + x^2\right)^x,\ \ln y = x \cdot \ln\left(x + x^2\right),$$

$$\left(\ln y\right)' = x' \cdot \ln\left(x + x^2\right) + x \cdot \left(\ln\left(x + x^2\right)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(x + x^2\right) + x \cdot \frac{1 + 2x}{x + x^2}, \qquad \frac{y'}{y} = \ln\left(x + x^2\right) + \frac{1 + 2x}{1 + x},$$

$$y' = \left(\ln\left(x + x^2\right) + \frac{1 + 2x}{1 + x}\right) \cdot y, \qquad y' = \left(\ln\left(x + x^2\right) + \frac{1 + 2x}{1 + x}\right) \cdot \left(x + x^2\right)^x.$$

c) $y=(\sin x)^{\ln x}$.

Решение:

$\ln y=\ln(\sin x)^{\ln x},\ \ln y=\ln x\cdot\ln(\sin x),$

$(\ln y)'=(\ln x)'\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot(\ln(\sin x))',$

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\cdot\ln(\sin x)+\ln x\cdot\frac{\cos x}{\sin x},\qquad y'=\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot ctgx\right)\cdot y,$

$y'=\left(\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\cdot ctgx\right)\cdot(\sin x)^{\ln x}.$

d) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}}$.

Решение:

$\ln y=\ln\sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}},\ \ln y=\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{x^2}{2+x^2},\ \ln y=\frac{1}{3}\cdot\left(\ln x^2-\ln\left(2+x^2\right)\right),$

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{2x}{2+x^2}\right),$

$y'=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{2+x^2}\right)\cdot y,\qquad y'=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{2+x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}}.$

10.Найти производную первого и второго порядков функции:

a) $\begin{cases}x=t-2+t^2;\\ y=1+t^2.\end{cases}$

Решение:

$y'_x=\frac{2t}{1+2t},\qquad y''_{xx}=\frac{\left(\frac{2t}{1+2t}\right)'_t}{1+2t}=\frac{\frac{2(1+2t)-4t}{(1+2t)^2}}{1+2t}=\frac{2}{(1+2t)^3}.$

b) $\begin{cases}x=1-\sin t;\\ y=1+\cos t.\end{cases}$

Решение:

$y'_x=\frac{-\sin t}{-\cos t}=tgt,\qquad y''_{xx}=\frac{(tgt)'_t}{-\cos t}=\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{-\cos t}=-\frac{1}{\cos^3 t}.$

c) $\begin{cases} x = tgt; \\ y = ctgt. \end{cases}$

Решение:

$$y'_x = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = -ctg^2 t, \qquad y''_{xx} = \frac{\left(-ctg^2 t\right)'_t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{-\frac{2ctgt}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = -2ctg^3 t.$$

d) $\begin{cases} x = t^2 + t^3; \\ y = 1 + t^2. \end{cases}$

Решение:

$$y'_x = \frac{2t}{2t + 3t^2} = \frac{2}{2 + 3t},$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{2}{2+3t}\right)'_t}{2t + 3t^2} = \frac{-\frac{6}{\left(2+3t\right)^2}}{2t + 3t^2} = \frac{-6}{\left(2t + 3t^2\right) \cdot \left(2 + 3t\right)^2}.$$

11. Найти дифференциалы функции $y = f(x)$ первого и второго порядка:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Решение:

$$y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-1 - x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2},$$

$$y'' = \frac{-2x\left(x^2 - 1\right)^2 - 4x\left(-1 - x^2\right)\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 1 - 2 - 2x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x\left(-3 - x^2\right)}{x^2 - 1} = \frac{2x\left(3 + x^2\right)}{x^2 - 1},$$

$$dy = \frac{-1 - x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot dx, \qquad d^2 y = \frac{2x\left(3 + x^2\right)}{x^2 - 1} \cdot dx^2.$$

b) $y = e^x + \cos\, x$.

Решение:

$$y' = e^x - \sin x, \; y'' = e^x - \cos x,$$

$dy = \left(e^x - \sin x \right) \cdot dx, \qquad d^2y = \left(e^x - \cos x \right) \cdot dx^2.$

c) $y = x \cdot \ln\, x$.

Решение:

$y' = \ln\, x + 1,\ y'' = \frac{1}{x}, \quad dy = (\ln\, x + 1) \cdot dx, \qquad d^2y = \frac{1}{x} \cdot dx^2.$

d) $y = \frac{\cos x}{x}$.

Решение:

$$y' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = -\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} \right),$$

$$y'' = -\left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} \right) =$$

$$= -\left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} \right),$$

$$dy = -\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} \right) \cdot dx,$$

$$d^2y = -\left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} \right) \cdot dx^2.$$

12. Составить уравнения касательной и нормали функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$:

a) $y = \frac{2x + 2}{x + 6}$, $M(-5; -8)$.

Решение:

$$y' = \frac{2(x+6) - (2x+2)}{(x+6)^2} = \frac{10}{(x+6)^2},\ y'(-5; -8) = \frac{10}{(-5+6)^2} = 10,$$

$y - (-8) = 10(x - (-5))$,

$y + 8 = 10(x + 5)$,

$y = 10(x + 5) - 8, \qquad y = 10x + 42$ – уравнение касательной,

$y - (-8) = -\frac{1}{10}(x - (-5))$,

$y + 8 = -\frac{1}{10}(x + 5)$,

$y = -\frac{1}{10}(x + 5) - 8, \qquad y = -\frac{1}{10}x - \frac{17}{2}$ – уравнение нормали.

b) $y=\dfrac{2x-1}{x+4}$, $M(-3;-7)$.

Решение:

$y'=\dfrac{2(x+4)-(2x-1)}{(x+4)^2}=\dfrac{9}{(x+4)^2}$, $y'(-3;-7)=\dfrac{9}{(-3+6)^2}=1$,

$y-(-7)=x-(-3)$,

$y+7=x+3$, $y=x-4$ – уравнение касательной,

$y-(-7)=-\dfrac{1}{1}(x-(-3))$,

$y+7=-x-3$, $y=-x-10$ – уравнение нормали.

13.Вычислить пределы функций, используя правила Лопиталя:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^3+1}{x^4-5x^3+1}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^3+3}{x^2-5x^4-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+6x^2}{2x-20x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+12x}{2-60x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12}{-120x}=$

$=\left[\dfrac{12}{\infty}\right]=0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+2}{x^2-2x^3-1}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+2}{x^2-2x^3-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x}{2x-6x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+2}{2-12x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x}{-12}=$

$=\left[\dfrac{\infty}{-12}\right]=\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^4+1}{x^4+x^3+x}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^4+1}{x^4+x^3+x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-8x^3}{4x^3+3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-24x^2}{12x^2+6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-48x}{24x+6}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-48}{24}=\left[\dfrac{-48}{24}\right]=-2$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+2}{1}=\dfrac{2+2}{1}=4$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\cdot\cos 6x}{2\cdot\cos 2x}=\frac{6}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x}{\cos 2x}=3\cdot\frac{1}{1}=3;$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

Решение:

Вычислим данный предел по правилу Лопиталя, но сначала прологарифмируем выражение: $e^{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{x}{x+1}}=e^{-1};$$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6\sqrt{1+x}}+\frac{1}{6\sqrt{1-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

m) $\lim\limits_{x\to -7}(15+2x)^{\frac{5}{x+7}}$.

Решение:

Вычислим данный предел по правилу Лопиталя, но сначала прологарифмируем выражение:

$$e^{\ln\lim\limits_{x\to -7}(15+2x)^{\frac{5}{x+7}}}=e^{\lim\limits_{x\to -7}\ln(15+2x)^{\frac{5}{x+7}}}=e^{\lim\limits_{x\to -7}\frac{5\ln(15+2x)}{x+7}}=$$

$$=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to -7}\frac{\frac{10}{15+2x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to -7}\frac{10}{15+2x}}=e^{10};$$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sin(1-x)}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(1-x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{-\cos(1-x)}=\frac{3}{-1}=-3.$$

14. Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить график:

а) $y=-x^3-2x^2+3.$

Решение:

Область определения функции: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x)=-(-x)^3-2(-x)^2+3=x^3-2x^2+3$, $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$.

Точки пересечения с осями координат:

$-x^3-2x^2+3=0$, $x^3+2x^2-3=0$, $x=1$, $(1;0)$ – точка пересечения с осью *Ox*,

$y=-0^3-2\cdot 0^2+3=3$, $(0;3)$ – точка пересечения с осью *Oy*.

Функция асимптот не имеет.

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$y'=-3x^2-4x$, $-3x^2-4x=0$, $x(3x+4)=0$, $x_1=0$, $x_2=-\frac{4}{3}$.

x	$\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3};0\right)$	0	$(0;+\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	убывает	$\frac{49}{27}$	возрастает	3	убывает

Точка максимума: $x=0$, точка минимума: $x=-\frac{4}{3}$.

Наибольшее значение функции: $y=3$, наименьшее значение функции: $y=\frac{49}{27}$.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$y''=-6x-4$, $-6x-4=0$, $x=-\frac{2}{3}$.

x	$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$
y''	+	0	–
y	вогнутость вниз	$\frac{65}{27}$	выпуклость вверх

Точка перегиба: $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{65}{27}$.

График функции изображен на рис. 8.

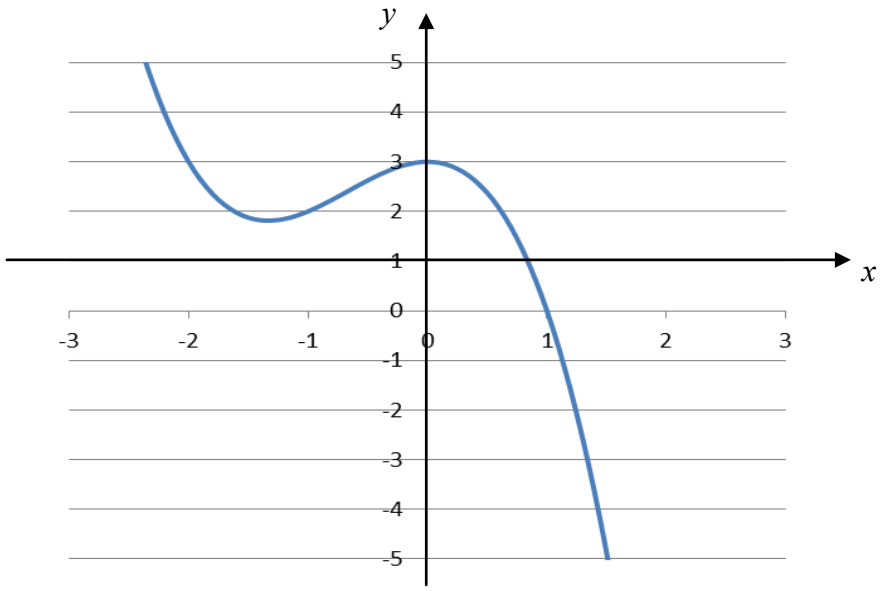


Рисунок 8

b) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение:

Область определения функции: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-1}=-\dfrac{x^2}{x+1}$, $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$.

Точки пересечения с осями координат:

$\dfrac{x^2}{x-1}=0$, $x=0$, $(0;0)$ – точка пересечения с осью *Ox*,

$y=\dfrac{0^2}{x-1}=0$, $(0;0)$ – точка пересечения с осью *Oy*.

Найдем асимптоты:

$x=1$ – точка разрыва – второго рода и является вертикальной асимптотой:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty.$$

Горизонтальной асимптоты нет: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty$.

Наклонная асимптота имеет уравнение: $y=x+1$,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1.$$

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},\ \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0,\ \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0,$$

$x_1=0,\ x_2=2,\ x_3\neq 1.$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	–	не существует	–	0	+
y	возрастает	0	убывает	не существует	убывает	4	возрастает

Точка максимума: $x=0$, точка минимума: $x=2$.

Наибольшее значение функции: $y=-1$, наименьшее значение функции: $y=4$.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)\left((x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\right)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3},\ \frac{2}{(x-1)^3}=0,\ x\neq 1.$$

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	не существует	+
y	выпуклость вверх	не существует	вогнутость вниз

Точек перегиба нет. График функции изображен на рис. 9.

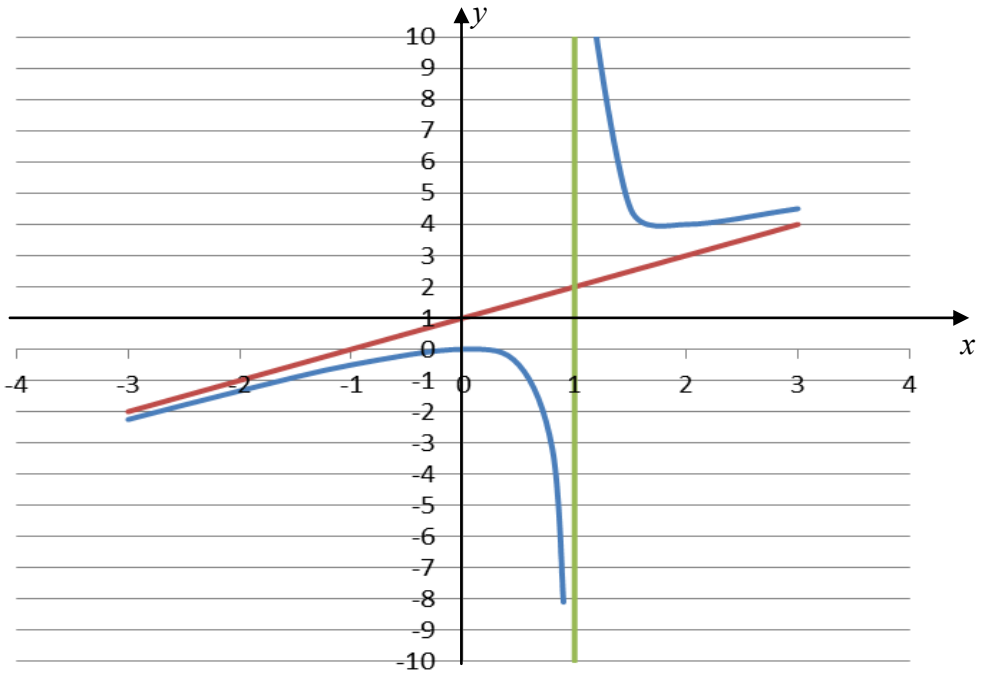


Рисунок 9

15.Вычислить интегралы:

a) $\int \frac{\sin\ x dx}{\cos^4 x}$.

Решение:

$$\int \frac{\sin\ x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + c = -\frac{1}{3\cos^3 x} + c.$$

b) $\int (2-x)\cos x\, dx$.

Решение:

$$\int (2-x)\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = 2-x, & \cos x dx = dv, \\ du = -dx, & \sin x = v \end{array}\right] =$$

$$= (2-x)\sin x + \int \sin x\, dx = (2-x)\sin x - \cos x + c.$$

c) $\int \frac{x+18}{x^2-4x-12} dx$.

Решение:

$$\int \frac{x+18}{x^2-4x-12} dx = \int \frac{x+18}{(x-6)(x+2)} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+18}{(x-6)(x+2)} = \dfrac{A}{x-6} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{Ax+2A+Bx-6B}{(x-6)(x+2)}, \\ \begin{cases} A+B=1; \\ 2A-6B=18. \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=1; \\ A-3B=9. \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=1; \\ 4B=-8. \end{cases} \quad \begin{cases} A=3; \\ B=-2. \end{cases} \end{array}\right] =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x-6} - 2\int \frac{dx}{x+2} = 3\ln|x-6| - 2\ln|x+2| + c.$$

d) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

Решение:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \left[\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right] = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + arctgx + c.$$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}} = \left[\begin{array}{l} x+1=t^4, \\ dx=4t^3dt, \\ \sqrt{x+1}=t^2, \\ \sqrt[4]{x+1}=t \end{array}\right] = \int \frac{4t^3dt}{t-t^2} = 4\int \frac{t^2dt}{1-t} =$$

$$= 4\int\left(-t-1+\frac{1}{1-t}\right)dt = 4\left(-\frac{t^2}{2}-t-\ln\left|1-t\right|\right)+c =$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{x+1}}{2}-\sqrt[4]{x+1}-\ln\left|1-\sqrt[4]{x+1}\right|\right)+c.$$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\ \left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{-10}dx = \left[\begin{array}{l} x=t^4, \\ dx=4t^3dt, \\ x^{-\frac{1}{2}}=t^{-2}, \\ \sqrt[4]{x}=t \end{array}\right] =$$

$$= \int t^{-2}\ \left(t+1\right)^{-10}4t^3dt = 4\int \frac{t}{\left(t+1\right)^{10}}\ dt = 4\int\left(\frac{t+1}{\left(t+1\right)^{10}}-\frac{1}{\left(t+1\right)^{10}}\right)dt =$$

$$= 4\int\left(\frac{1}{\left(t+1\right)^{9}}-\frac{1}{\left(t+1\right)^{10}}\right)dt = 4\left(\frac{1}{-8\left(t+1\right)^{8}}-\frac{1}{-9\left(t+1\right)^{9}}\right)+c =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t+1\right)^{8}}+\frac{4}{9\left(t+1\right)^{9}}+c = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{8}}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{9}}+c.$$

k) $\int \sin^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt \end{array}\right] = -\int \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - 1\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + c =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$$

m) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx$.

Решение:

$$\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x, & \sin x \, dx = dv, \\ du = dx, & -\cos x = v \end{array}\right] =$$

$$\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x, & \sin x \, dx = dv, \\ du = dx, & -\cos x = v \end{array}\right] = -x \cos x \Big|_{2\pi}^{3\pi} + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \cos x \, dx =$$

$$= -3\pi \cos 3\pi + 2\pi \cos 2\pi + \sin x \Big|_{2\pi}^{3\pi} = 3\pi + 2\pi = 5\pi.$$

n) $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$.

Решение:

$$\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 4} = t, \\ x^2 + 4 = t^2, \\ 2x dx = 2t dt, \\ x dx = t dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \end{array} \end{array}\right] = \int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{t dt}{t} = \int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} dt = t \Big|_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

16. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

a) $y = x^2,\ y = 1$ (см. рис. 10).

Решение:

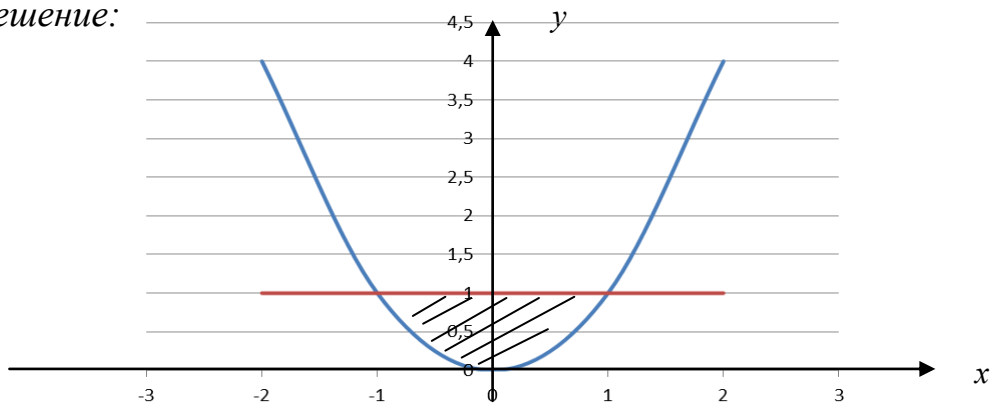


Рисунок 10

$y = x^2,\ y = 1,\ 1 = x^2,\ x_{1,2} = \pm 1.$

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) $y = x^3 + 3,\ x = 0,\ y = x - 1,\ x = 2$ (см. рис. 11).

Решение:

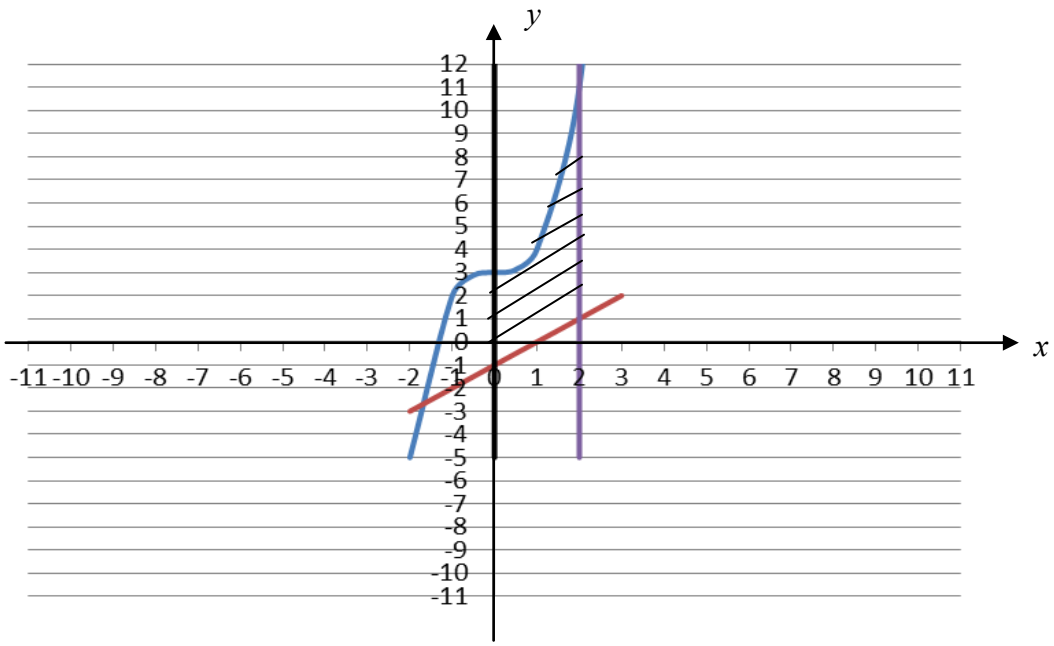


Рисунок 11

$$S = \int_{0}^{2} (x^3 + 3 - x + 1)dx = \int_{0}^{2} (x^3 + 4 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 4x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{0}^{2} = 4 + 8 - 2 = 10.$$

c) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$ (см. рис. 12)

Решение:

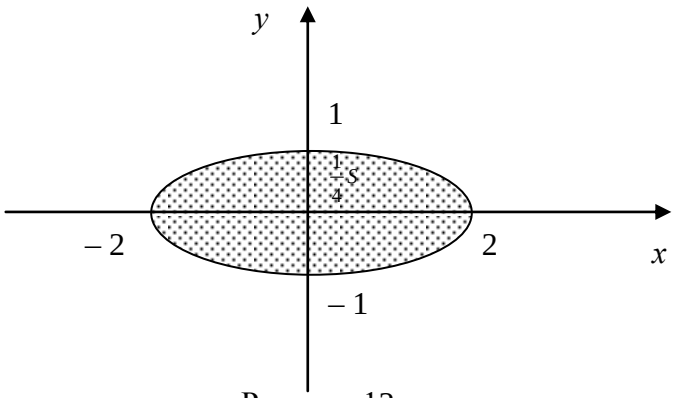


Рисунок 12

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-2\sin t)dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2t\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 = \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{4}S = \frac{\pi}{2},\ S = 2\pi.$$

d) $r = 2 \cdot \sin 3\varphi$ (см. рис. 13).

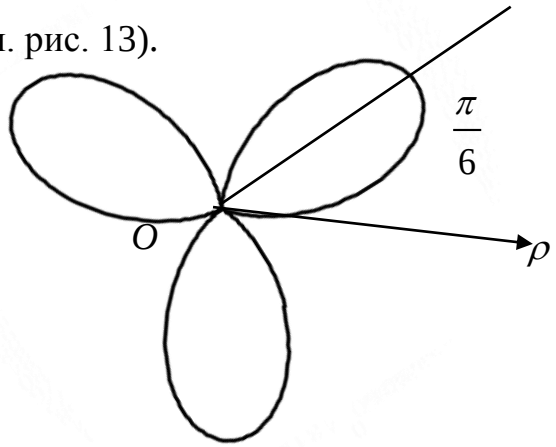


Рисунок 13

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} (2 \cdot \sin 3\varphi)^2 d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(3\varphi) d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos(6\varphi)}{2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(1-\cos(6\varphi)\right) d\varphi = \left(\varphi - \frac{\sin(6\varphi)}{6} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - 0 - 0 + 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\frac{1}{6}S = \frac{\pi}{6},\ S = \pi.$$

17. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 16$ (см. рис. 14).

Решение:

$x^2 = 16$, $x_{1,2} = \pm 4$.

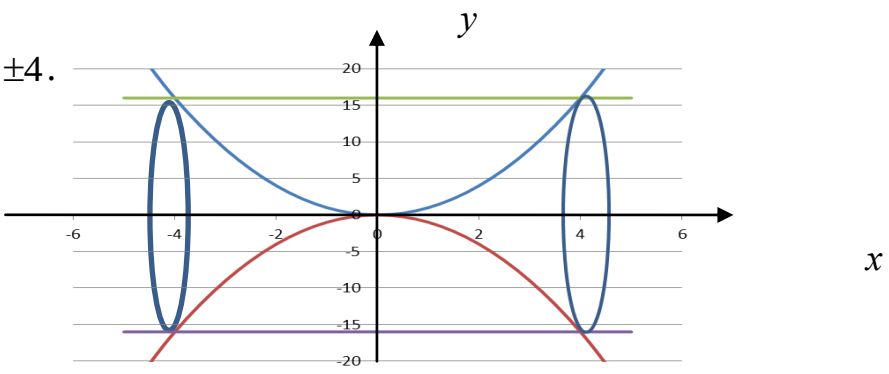


Рисунок 14

$$V = \pi \int_{-4}^{4} (16^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_{-4}^{4} (256 - x^4)dx = \pi \left(256x - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-4}^{4} =$$

$$= \pi \left(1024 - \frac{1024}{5} + 1024 - \frac{1024}{5} \right) = \pi \left(2048 - \frac{2048}{5} \right) = 1638,4\pi .$$

18. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 1 - x$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$ (см. рис. 15).

Решение:

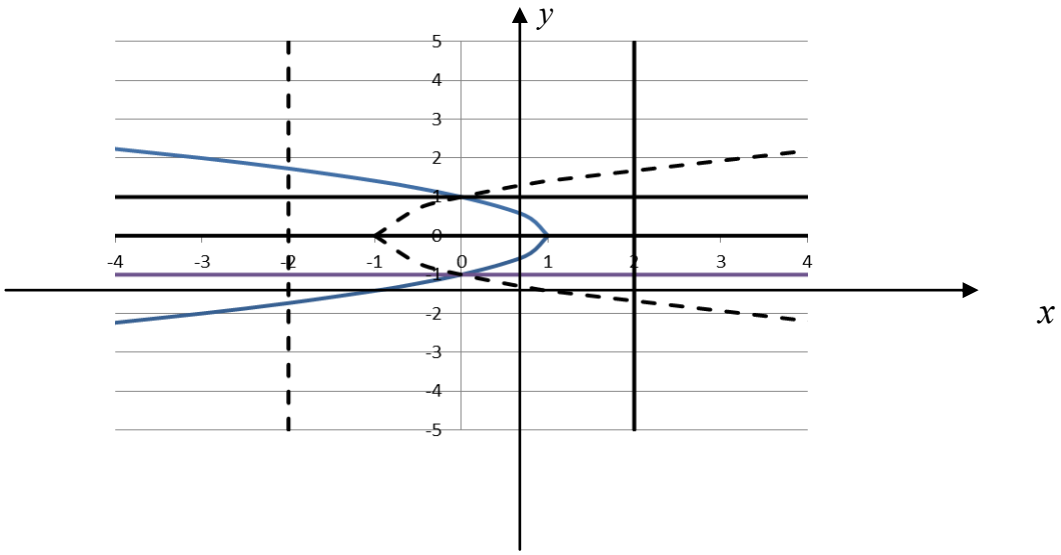


Рисунок 15

$$V = \pi \int_0^1 (2^2 - (1 - y^2)^2) dy = \pi \int_0^1 (3 + 2y^2 - y^4) dy = \pi \left(3y + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi \left(3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{15} \pi .$$

§ 3. Комплексные числа

Литература: основная: [2], [4]; дополнительная: [15];
методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение мнимой единицы, комплексного числа, равных, противоположных и сопряженных комплексных чисел.
2. Геометрическое изображение комплексных чисел; определение модуля и аргумента комплексного числа.
3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.
4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сложение, вычитание, умножение, деление.
5. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня n-ой степени.

Примерные практические задания (задачи)

1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 13x + 48 = 0$.
   Решение:
   $$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 192}}{2} = \frac{-13 \pm \sqrt{-23}}{2}.$$
2. Решить квадратное уравнение $z^2 + ix + 6 = 0$.
   Решение:
   $$z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-i \pm \sqrt{-1 - 24}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{25i^2}}{2} =$$
   $$= \frac{-i \pm 5i}{2},\ z_1 = \frac{-i + 5i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i,\ z_2 == \frac{-i - 5i}{2} = -\frac{6i}{2} = -3i.$$
3. Составить квадратное уравнение, если известен один корень: $x_1 = -4 + i$.
   Решение:
   $x_1 = -4 + i,\ x_2 = -4 - i,$
   $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 + i - 4 - i = -p; \\ (-4 + i) \cdot (-4 - i) = q; \end{cases} \quad \begin{cases} -8 = -p; \\ 17 = q; \end{cases} \quad \begin{cases} p = 8; \\ q = 17; \end{cases}$$
   $$x^2 + 8x + 17 = 0.$$

4. Изобразить на комплексной плоскости противоположное и сопряженное числа комплексному числу $z = -5 + 2i$.

Решение:

$z = -5 + 2i$, $\bar{z} = -5 - 2i$, $-z = 5 - 2i$ (см. рис. 16).

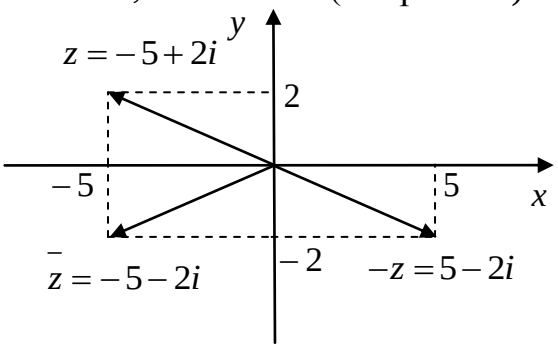


Рисунок 16

5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству: $|z| \le 1$.

Решение:

$z = x + yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\sqrt{x^2 + y^2} \le 1$, $x^2 + y^2 \le 1$ (см. рис. 17).

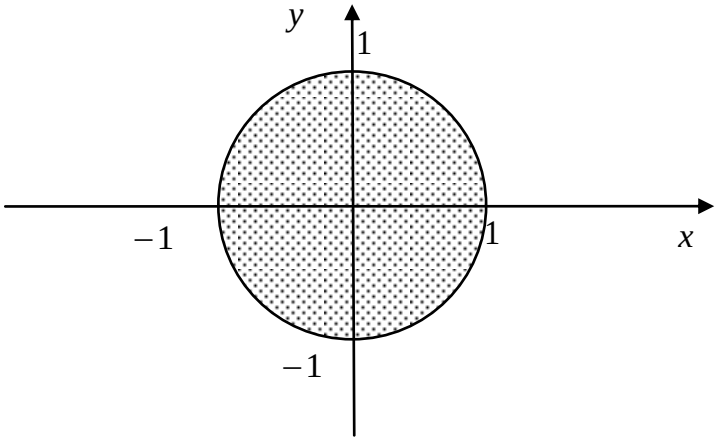


Рисунок 17

6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: $0 \le |z| \le 3, |\mathrm{Re}\, z| \ge 1, |\mathrm{Im}\, z| \le 1$.

Решение:

$z = x + yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3$, $0 \le x^2 + y^2 \le 9$

(см. рис. 18).

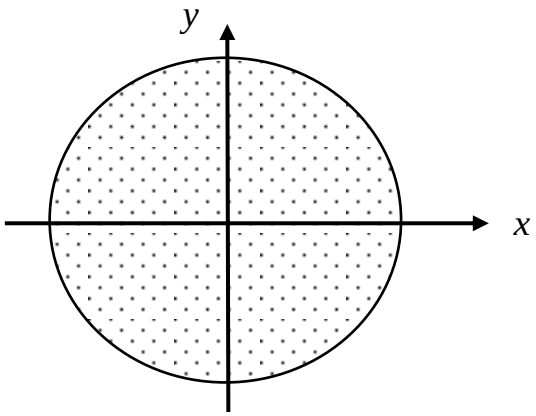


Рисунок 18

$\left|\mathrm{Re}\, z\right| = \left|x\right| \geq 1,\ \left|x\right| \geq 1, \quad x \geq 1$ и $x \leq -1$ (см. рис. 19).

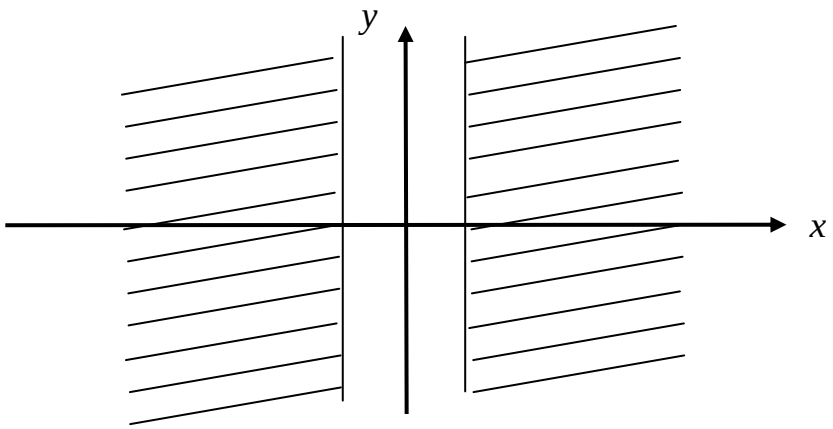


Рисунок 19

$\left|\mathrm{Im}\, z\right| = \left|y\right| \leq 1,\ \left|y\right| \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$ (см. рис. 20).

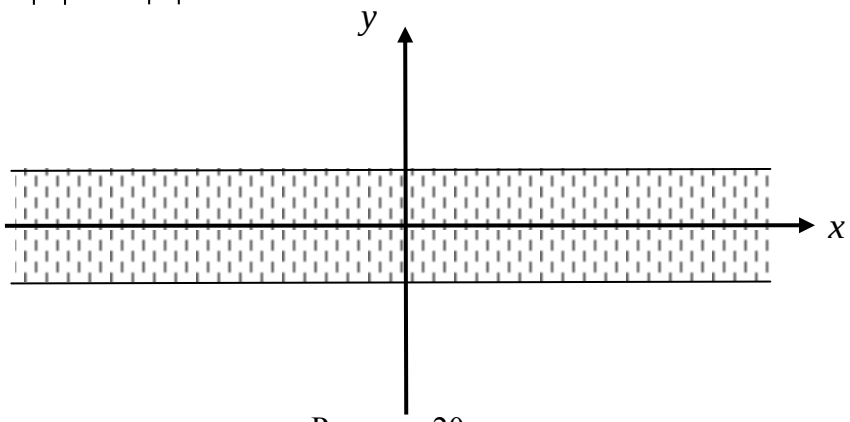


Рисунок 20

На рисунке 21 представлен итоговый чертеж.

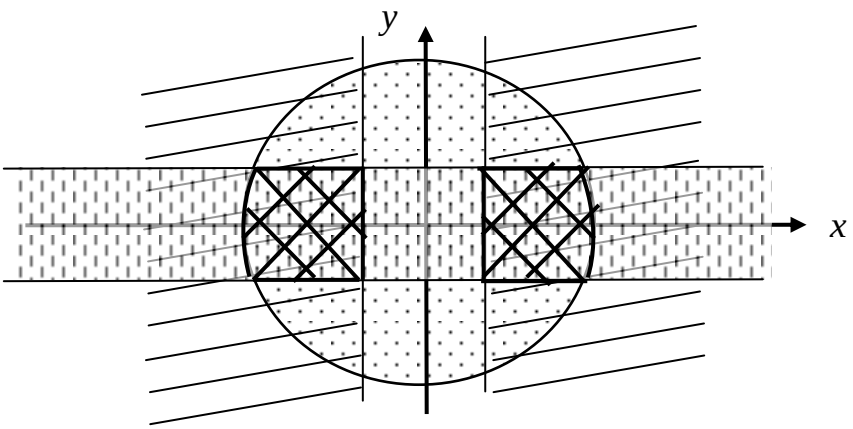


Рисунок 21

7. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию: $\mathrm{Re}(z+1)^2 \geq 2$.

Решение:

$\mathrm{Re}(z+1)^2 \geq 2$, $\mathrm{Re}(x+yi+1)^2 \geq 2$, $\mathrm{Re}\left((x+1)+yi\right)^2 \geq 2$,

$\mathrm{Re}\left((x+1)^2+2(x+1)yi+y^2i^2\right) \geq 2$, $\mathrm{Re}\left((x+1)^2+2(x+1)yi-y^2\right) \geq 2$,

$\mathrm{Re}\left(\left((x+1)^2-y^2\right)+2(x+1)yi\right) \geq 2$, $(x+1)^2-y^2 \geq 2$, $\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{y^2}{2} \geq 1$.

Получили множество точек, расположенных во внутренней части ветвей гиперболы (см. рисунок 22).

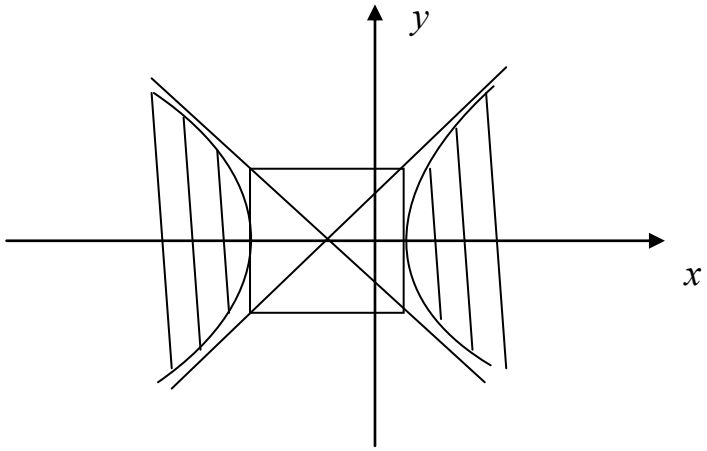


Рисунок 22

8. Вычислить: $i^{124}+5i^{42}-4i^3$.

Решение:

$i^{124}+5i^{42}-4i^3=(i^2)^{62}+5\cdot(i^2)^{21}-4i^2\cdot i=(-1)^{62}+5\cdot(-1)^{21}-4\cdot(-1)\cdot i=$
$=1-5+4i=-4+4i$.

9. Найти действительную и мнимую часть числа z, если $z = z_1 - 2 \cdot z_2$ и $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 9i$.

Решение:

$z = z_1 - 2 \cdot z_2 = -1 - 3i - 2 \cdot (9i) = -1 - 3i - 18i = -1 - 21i$, $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -21$.

10. Найти модуль числа z, если $z = z_1 \cdot z_2$ и $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$.

Решение:

$z = z_1 \cdot z_2 = (-1 - 2i) \cdot (-1 + 2i) = 1 + 4 = 5$, $|z| = 5$.

11. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - 3{,}5i$, $z_2 = -7 - 2i$. Требуется найти $z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2$ в алгебраической форме.

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - 3{,}5i}{-7 - 2i} = \frac{(1 - 3{,}5i) \cdot (-7 + 2i)}{(-7 - 2i) \cdot (-7 + 2i)} = \frac{-7 + 24{,}5i + 2i + 7}{49 + 4} = \frac{26{,}5i}{53} = 0{,}5i,$$

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 = (0{,}5i)^2 = -0{,}25.$$

12. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной форме. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ в алгебраической форме, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

а) $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\, i$, $z_2 = 1 - i$.

Решение:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4,$$

$$\arg z_1 = arctg \left(\frac{-2\sqrt{3}}{2} \right) = arctg \left(-\sqrt{3} \right) = -arctg \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$ (IV четверть).

$$z_1 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$ – тригонометрическая форма.

$z_1 = 4e^{-\frac{\pi}{3} i}$ – показательная форма.

$$r_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\arg z_2 = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = arctg\left(-1\right) = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}$$ (IV четверть).

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ –

тригонометрическая форма.

$z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ – показательная форма.

$$z_1 + z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i + 1 - i = 3 - (2\sqrt{3}+1)i,$$

$$z_1 - z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i - (1-i) = 1 + (-2\sqrt{3}+1)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 2\sqrt{3}i)\cdot(1-i) = 2 - 2\sqrt{3}i - 2i + 2\sqrt{3}i^2 =$$

$$= (2 - 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{3}+2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(2 - 2\sqrt{3}i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i + 2i - 2\sqrt{3}i^2}{2} =$$

$$= \frac{(2+2\sqrt{3}) + (-2\sqrt{3}+2)i}{2} = (1+\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}+1)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i},\ \frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

b) $z_1 = 2i$, $z_2 = 2 - 2i$.

Решение:

$r_1 = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$, $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (ось *Oy*).

$z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ – тригонометрическая форма.

$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ – показательная форма.

$r_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$,

$\arg z_2 = arctg\left(\dfrac{-2}{2}\right) = arctg\left(-1\right) = -arctg1 = -\dfrac{\pi}{4}$ (IV четверть).

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ –

тригонометрическая форма.

$z_2 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ – показательная форма.

$z_1 + z_2 = 2i + 2 - 2i = 2$, $\qquad z_1 - z_2 = 2\,i - (2 - 2i) = -2 + 4i$,

$z_1 \cdot z_2 = 2i \cdot (2 - 2i) = 4i - 4i^2 = 4 + 4i$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2i}{2-2i} = \dfrac{2i \cdot (2+2i)}{(2-2i)\cdot(2+2i)} = \dfrac{4i + 4i^2}{8} = \dfrac{-4+4i}{8} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$,

$z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) =$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

c) $z_1 = -5 + 5i$, $z_2 = -2i$.

Решение:

$r_1 = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$,

$$\arg z_1 = arctg\left(\frac{5}{-5}\right) + \pi = arctg\left(-1\right) + \pi = -arctg1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

(II четверть).

$z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма.

$z_1 = 5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ – показательная форма.

$r_2 = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\arg z_2 = \frac{3\pi}{2}$ (ось *Oy*).

$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ – тригонометрическая форма.

$z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$ – показательная форма.

$z_1 + z_2 = -5 + 5i - 2i = -5 + 3i$, $\quad z_1 - z_2 = -5 + 5i - (-2i) = -5 + 7i$,

$z_1 \cdot z_2 = (-5 + 5i)\cdot(-2i) = 10i - 10i^2 = 10 + 10i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5 + 5i}{-2i} = \frac{(-5 + 5i)\cdot(2i)}{(-2i)\cdot(2i)} = \frac{-10i + 10i^2}{4} = \frac{-10 - 10i}{4} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= 10\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$z_1 \cdot z_2 = 10\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}i}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

13.Возвести комплексное число $z = -4 - 4i$ в указанную степень:

a) z^2.

Решение:

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4},$$

$$z = -4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

$$z^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(-\frac{2\cdot 3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\cdot 3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 32\left(0 - i\right) = -32i.$$

b) z^4.

Решение:

$$|z| = 4\sqrt{2},\ \arg z = -\frac{3\pi}{4},$$

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

$$z^4 = \left(4\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(-\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 1024\left(\cos\left(-3\pi\right) + i\sin\left(-3\pi\right)\right) = 1024\left(-1 + 0\right) = -1024.$$

14.Вычислить $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-4 - 4i}$.

Решение:

$$|z| = 4\sqrt{2},\ \arg z = -\frac{3\pi}{4},$$

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-4 - 4i} = \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-3\pi + 8\pi k}{16}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi + 8\pi k}{16}\right)\right).$$

При $k = 0$ получаем $\sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{16}\right)\right)$.

При $k = 1$ получаем $\sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)\right)$.

При $k = 2$ получаем $\sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{16}\right)\right)$.

При $k = 3$ получаем $\sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{16}\right)\right)$.

§ 4. Функция двух переменных

Литература: основная: [1-3], [4], [7]; дополнительная: [10]; методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение функции двух переменных; понятие частных производных функции двух переменных, правило вычисления частных производных.
2. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
3. Понятие экстремума функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных. Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум.

Примерные практические задания (задачи)

1. Найти частные производные от функции:

a) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение:

$$z'_x = \frac{2x \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 + y^2 - x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z'_y = \frac{-2y \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4y \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

b) $e^z + z = 2xy^4 - x^2 + 2$.

Решение:

$$e^z z'_x + z'_x = 2y^4 - 2x, \qquad z'_x = \frac{2y^4 - 2x}{e^z + 1}.$$

$$e^z z'_y + z'_y = 8xy^3, \qquad z'_y = \frac{8xy^3}{e^z + 1}.$$

c) $z = xy + x^2 + y^2,\ x = \cos t,\ y = \sin t$.

Решение:

$$z'_t = \left(xy + x^2 + y^2\right)'_x \cdot (\cos t)'_t + \left(xy + x^2 + y^2\right)'_y \cdot (\sin t)'_t =$$

$$= -\sin t \cdot (y + 2x) + (x + 2y) \cdot \cos t = -\sin t \cdot (\sin t + 2\cos t) + (\cos t + 2\sin t) \cdot \cos t =$$

$$= -\sin^2 t - 2\sin t \cos t + \cos^2 t + 2\sin t \cdot \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

2. Найдите частные производные функции $z = 2x^2 - y^3 x + 2x - 3y - 2$ до второго порядка. Запишите дифференциалы первого и второго порядка.

Решение:

$z'_x = 4x - y^3 + 2,\ z'_y = -3y^2 x - 3,\ z''_{xx} = 4,\ z''_{yy} = -6yx,\ z''_{xy} = -3y^2,$

$z''_{yx} = -3y^2.$

$dz = (4x - y^3 + 2)dx + (-3y^2 x - 3)dy,\ d^2 z = 4dx^2 - 6y^2 dxdy - 6yxdy^2.$

3. Исследовать на экстремум функции $z = f\left(x; y\right)$:

a) $z = x^2 + y^2 - 8x + 6y$.

Решение:

$z'_x = 2x - 8,\ z'_y = 2y + 6,\ z''_{xx} = 2,\ z''_{yy} = 2,\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yx} = 0.$

$$\begin{cases} 2x - 8 = 0; \\ 2y + 6 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4; \\ y = -3. \end{cases}$$

$\left(4; -3\right)$ – стационарная точка.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ и $z''_{xx} = 2 > 0$, следовательно, точка $\left(4; -3\right)$ является точкой минимума.

$z_{\min} = 4^2 + (-3)^2 - 8 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) = -25.$

b) $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

Решение:

$z'_x = 3x^2 - 9x,\ z'_y = 3y^2 - 9y,\ z''_{xx} = 6x - 9,\ z''_{yy} = 6y - 9,\ z''_{xy} = 0,$

$z''_{yx} = 0.$

$$\begin{cases} 3x^2 - 9x = 0; \\ 3y^2 - 9y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x(x - 3) = 0; \\ 3y(y - 3) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0,\ x = 3; \\ y = 0,\ y = 3. \end{cases}$$

$\left(0; 0\right), \left(0; 3\right), \left(3; 0\right), \left(3; 3\right)$ – стационарные точки.

1) $(0;0)$, $z''_{xx} = -9$, $z''_{yy} = -9$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 81 > 0$ и $z''_{xx} = -9 < 0$, следовательно, точка $(0;0)$ является точкой максимума.

$z_{\max} = 0^3 + 0^3 - 9 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

2) $(0;3)$, $z''_{xx} = -9$, $z''_{yy} = 9$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -81 < 0$, следовательно, в точке $(0;3)$ функция экстремума не имеет.

3) $(3;0)$, $z''_{xx} = 9$, $z''_{yy} = -9$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -81 < 0$, следовательно, в точке $(3;0)$ функция экстремума не имеет.

4) $(3;3)$, $z''_{xx} = 9$, $z''_{yy} = 9$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 81 > 0$ и $z''_{xx} = 9 > 0$, следовательно, точка $(3;3)$ является точкой минимума.

$z_{\min} = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 = -27$.

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0;z_0)$:

а) $z = 1 + x^2 + y^2$, $M(1;1;3)$.

Решение:

$z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$,

$z(M) = 3$, $z'_x(M) = 2$, $z'_y(M) = 2$.

$z - 3 = 2(x-1) + 2(y-1)$,

$z = 2x + 2y - 1$ – уравнение касательной плоскости.

$\frac{z-3}{-1} = \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2}$ – уравнение нормали.

b) $z = arctg\,\frac{y}{x},\ M\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right).$

Решение:

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$z(M) = \frac{\pi}{4},$$

$$z'_x(M) = -\frac{1}{2},$$

$$z'_y(M) = \frac{1}{2}.$$

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1),$$

$z = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}$ – уравнение касательной плоскости.

$\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}}$ – уравнение нормали.

5. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{xy+\frac{y}{x}}$ данному уравнению $z\cdot\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = xy.$

$$z = \sqrt{xy+\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2y+y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\frac{2x^2y-x^2y-y}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\frac{x^2y-y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\frac{x^2+1}{x}.$$

Подставим найденные производные и функцию в данное уравнение:

$$z\cdot\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=xy,$$

$$\sqrt{\frac{x^2y+y}{x}}\cdot\left(x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\frac{x^2y-y}{x^2}+y\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\frac{x^2+1}{x}\right)=xy,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2y+y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2y+y}}\cdot\left(x\cdot\frac{x^2y-y}{x^2}+y\cdot\frac{x^2+1}{x}\right)=xy,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2y-y}{x}+\frac{yx^2+y}{x}\right)=xy,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2y-y+yx^2+y}{x}\right)=xy,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2y}{x}=xy,\ xy=xy.$$

Следовательно, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

§ 5. Дифференциальные уравнения

Литература: основная: [2], [3], [5], [7], [8]; дополнительная: [10]; методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение дифференциального уравнения, его порядка; понятие решения дифференциального уравнения (общего и частного).
2. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Алгоритм нахождения общего решения.
3. Определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Алгоритм нахождения общего решения.
4. Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Алгоритм нахождения общего решения.
5. Определение уравнения Я. Бернулли. Алгоритм нахождения общего решения.
6. Типы дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Нахождение общего решения.
7. Понятие и интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
8. Понятие линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго с постоянными коэффициентами.
9. Интегрирование систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Примерные практические задания (задачи)

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' - y = e^x$.

Решение:

$y' - y = e^x$ – *линейное дифференциальное уравнение первого порядка.*

Метод Бернулли

Замена: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - uv = e^x,$$

$$u'v + u(v' - v) = e^x,$$

$$\begin{cases} v' - v = 0; \\ u'v = e^x. \end{cases}$$

$v' - v = 0, \qquad v' = v,$

$\frac{dv}{dx} = v, \qquad \frac{dv}{v} = dx,$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx,$

$\ln|v| = x + c,\ c = 0,$

$\ln|v| = x, \qquad v = e^x.$

$u'v = e^x,$

$u'e^x = e^x, \qquad u' = 1,$

$\frac{du}{dx} = 1, \qquad du = dx, \qquad \int du = \int dx, \qquad u = x + c.$

$y = uv = (x + c) \cdot e^x$ – *общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.*

b) $\left(x^2 - 2y^2\right) dx + 2xy\, dy = 0.$

Решение:

Проверим, является ли уравнение однородным:

$P(x; y) = x^2 - 2y^2,$

$P(\lambda x; \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2 \left(x^2 - 2y^2\right) = \lambda^2 P(x; y).$

$Q(x; y) = 2xy,\ Q(\lambda x; \lambda y) = 2\lambda x \lambda y = \lambda^2 2xy = \lambda^2 Q(x; y).$

Функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ однородные одного порядка, следовательно, уравнение однородное.

$\left(x^2 - 2y^2\right) dx + 2xy\, dy = 0$ – *однородное дифференциальное уравнение первого порядка.*

$\left(x^2 - 2y^2\right) dx + 2xy\, dy = 0,$

$2xy\, dy = -\left(x^2 - 2y^2\right) dx,$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y' = \frac{2y^2 - x^2}{2xy}.$

Замена: $\frac{y}{x} = t,\ y = xt,\ y' = t + xt'.$

$t + xt' = \frac{2x^2 t^2 - x^2}{2x^2 t},$

$$t + xt' = \frac{2t^2 - 1}{2t},$$

$$xt' = \frac{2t^2 - 1}{2t} - t,\ xt' = \frac{2t^2 - 1 - 2t^2}{2t},\ xt' = \frac{-1}{2t},$$

$$tdt = \frac{-dx}{2x},\ \int tdt = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x},\ t^2 = -\frac{1}{2}\ln|x| + c,$$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$ – *общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка.*

c) $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$.

Решение:

$y' - \frac{1}{x}y = -y^2$ – *уравнение Бернулли.*

$$y' - \frac{1}{x}y = -y^2,$$

$$y'y^{-2} - \frac{1}{x}y^{-1} = -1,$$

Замена: $y^{-1} = t,\ -y^{-2}y' = t',\ y^{-2}y' = -t',$

$$-t' - \frac{1}{x}t = -1,$$

$t' + \frac{1}{x}t = 1$ – *линейное дифференциальное уравнение первого порядка.*

Замена: $t = uv,\ t' = u'v + uv',$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 1, \qquad u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = 1,$$

$$\begin{cases} v' + \frac{1}{x}v = 0; \\ u'v = 1. \end{cases}$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0, \qquad v' = -\frac{1}{x}v,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},$$

$\ln|v| = -\ln|x|,\ c = 0,$ $v = \frac{1}{x}.$

$u'v = 1,$ $u'\frac{1}{x} = 1,$

$du = xdx,$ $\int du = \int xdx,$ $u = \frac{x^2}{2} + c.$

$t = uv = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\frac{1}{x},$

$y^{-1} = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\frac{1}{x}$ – *общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.*

d) $\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2\right)dy = 0.$

Проверим выполнение необходимого и достаточного условия $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$:

$M(x,y) = x^2 + 2xy,\ N(x,y) = x^2 + 2,$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x.$

$\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2\right)dy = 0$ – *дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.*

$\begin{cases} \frac{\partial u}{dx} = x^2 + 2xy; \\ \frac{\partial u}{dy} = x^2 + 2. \end{cases}$ $\frac{\partial u}{dx} = x^2 + 2xy,$ $\partial u = \left(x^2 + 2xy\right)dx,$

$u(x,y) = \int\left(x^2 + 2xy\right)dx + C(y),$ $u(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + C(y).$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + x^2y\right) + C'(y),$

$x^2 + 2 = x^2 + C'(y),\ C'(y) = 2,\ \frac{dC(y)}{dy} = 2,\ dC(y) = 2dy,\ C(y) = 2y + C,$

$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + 2y + C.$

$\frac{x^3}{3} + x^2y + 2y = C$ – *общий интеграл.*

е) $y'' + 3y' = 9x$.

Решение:

$y'' + 3y' = 9x$ *– линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$y = u + v$ *– общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' + 3y' = 0$ *– линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$r^2 + 3r = 0$ *– характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.*

$r_1 = 0,\ r_2 = -3$ *– корни характеристического уравнения.*

$u = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-3x},\quad u = c_1 + c_2 e^{-3x}$ *– общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$f(x) = 9x,\ \alpha = 0,\ k = 1,\ v\left(x\right) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$

$v = \left(Ax + B\right)x,\qquad v = Ax^2 + Bx.$

$v = Ax^2 + Bx,$

$v' = 2Ax + B,$

$v'' = 2A.$

$y'' + 3y' = 9x,$

$2A + 3(2Ax + B) = 9x,$

$2A + 6Ax + 3B = 9x,$

x^1	$6A$
x^0	$2A + 3B$

$$\begin{cases} 6A = 9; \\ 2A + 3B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{3}{2}; \\ 3 + 3B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{3}{2}; \\ B = -1. \end{cases}$$

$$v = \frac{3}{2}x^2 - x.$$

$y = u + v = c_1 + c_2 e^{-3x} + \dfrac{3}{2}x^2 - x$ *– общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.*

f) $y'' - 2y' + y = \left(1 + x^2\right)e^{-x}$.

$y = u + v$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' - 2y' + y = 0$ – *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$r^2 - 2r + 1 = 0$ – *характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*.

$D = 4 - 4 = 0,$ $r_1 = \dfrac{2+0}{2} = 1,$ $r_1 = \dfrac{2-0}{2} = 1$ – *корни характеристического уравнения.*

$u = C_1 e^x + xC_2 e^x$ *– общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$f\left(x\right) = \left(1 + x^2\right)e^{-x}, \quad \alpha = -1, \quad k = 0, \quad v\left(x\right) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

$$v\left(x\right) = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x},$$

$$v'\left(x\right) = \left(2Ax + B\right)e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x} = \left(2Ax + B - Ax^2 - Bx - C\right)e^{-x},$$

$$v''\left(x\right) = \left(2A - 2Ax - B\right)e^{-x} - \left(2Ax + B - Ax^2 - Bx - C\right)e^{-x} =$$

$$= \left(2A - 2Ax - B - 2Ax - B + Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x} =$$

$$= \left(2A - 4Ax - 2B + Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x}.$$

$$y'' - 2y' + y = \left(1 + x^2\right)e^{-x},$$

$$\begin{array}{r|l} 1 \cdot y'' & 2A - 4Ax - 2B + Ax^2 + Bx + C, \\ \hline -2 \cdot y' & -4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C, \\ \hline 1 \cdot y & Ax^2 + Bx + C. \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A + 2A + A = 1,\ 4A = 1,\ A = 0,25, \\ \hline x^1 & -4A + B - 4A + 2B + B = 0,\ -8A + 4B = 0,\ B = 0,5, \\ \hline x^0 & 2A - 2B + C - 2B + 2C + C = 1,\ 2A - 4B + 4C = 1,\ C = 0,625. \end{array}$$

$v(x) = \left(0,25x^2 + 0,5x + 0,625\right)e^{-x}$ – *частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

$y = C_1e^x + xC_2e^x + \left(0,25x^2 + 0,5x + 0,625\right)e^{-x}$ – *общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

k) $y'' + 4y = \cos 2x$.

Решение:

$y'' + 4y = \cos 2x$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$y = u + v$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' + 4y = 0$ – *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$r^2 + 4 = 0$ – *характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.*

$r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$ – *корни характеристического уравнения.*

$u = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$ – *общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$f(x) = \cos 2x$, $\alpha + \beta i = 0 + 2i$, $k = 1$,

$v(x) = x^k e^{\alpha x}\left(R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x\right)$,

$v = \left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)x$,

$v = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$,

$v' = A\cos(2x) - 2Ax\sin(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x)$,

$v'' = -2A\sin(2x) - 2A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 2B\cos(2x) +$

$+2B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x).$

$y'' + 4y = \cos 2x$

$1\cdot y''$	$-4A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x),$
$0\cdot y'$	$0,$
$4\cdot y$	$4Ax\cos(2x) + 4Bx\sin(2x).$

$$\begin{array}{l|l} x\sin 2x & -4B+4B=0,\ 0=0, \\ \hline x\cos 2x & -4A+4A=0,\ 0=0, \\ \hline \sin 2x & -4A=0,\ A=0, \\ \hline \cos 2x & 4B=1,\ B=0,25. \end{array}$$

$v=0,25x\sin(2x)$ – *частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

$y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+0,25x\sin(2x)$ – *общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

m) $y''+y=\sin x$.

Решение:

$y''+y=\sin x$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$y=u+v$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y''+y=0$ – *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$r^2+1=0$ – *характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*.

$D=0-4=-4=4i^2$, $r_1=\dfrac{0+2i}{2}=i$, $r_2=\dfrac{0-2i}{2}=-i$ – *корни характеристического уравнения*.

$u=C_1\cos x+C_2\sin x$ – *общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$f(x)=\sin x,\ \alpha+\beta i=0+i,\ k=1,$

$v(x)=x^k e^{\alpha x}\left(R_1(x)\cos\beta x+R_2(x)\sin\beta x\right),$

$v(x)=x\left(A\cos x+B\sin x\right)=Ax\cos x+Bx\sin x,$

$v'(x)=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x,$

$v''(x)=-A\sin x-A\sin x-Ax\cos x+B\cos x+B\cos x-Bx\sin x=$

$=-2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x.$

$y''+y=\sin x,$

$$\begin{array}{l|l} 1\cdot y'' & -2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x, \\ \hline 0\cdot y' & 0, \\ \hline 1\cdot y & Ax\cos x+Bx\sin x. \end{array}$$

$x\sin x$	$-B+B=0,\ 0=0,$
$x\cos x$	$-A+A=0,\ 0=0,$
$\sin x$	$-2A=1,\ A=-0,5,$
$\cos x$	$2B=0,\ B=0.$

$v\left(x\right)=-0,5x\cos x$ – *частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

$y=C_1\cos x+C_2\sin x-0,5x\cos x$ – *общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

n) $y''-3y'=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$.

Решение:

$y''-3y'=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка*.

$y=u+v$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y''-3y'=0$ – *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка*.

$r^2-3r=0$ – *характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*.

$r_1=0,\ r_2=3$ – *корни характеристического уравнения*.

$u=c_1e^{0x}+c_2e^{3x},\quad u=c_1+c_2e^{3x}$ – *общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$f(x)=e^x\left(\sin x+\cos x\right),\ \alpha+\beta i=1+i,\ k=0,$$

$$v\left(x\right)=x^ke^{\alpha x}\left(R_1(x)\cos\beta x+R_2(x)\sin\beta x\right),$$

$$v=\left(A\cos x+B\sin x\right)e^x,\ v=Ae^x\cos x+Be^x\sin x.$$

$$v=Ae^x\cos x+Be^x\sin x,$$

$$v'=Ae^x\cos x-Ae^x\sin x+Be^x\sin x+Be^x\cos x,$$

$$v''=Ae^x\cos x-Ae^x\sin x-Ae^x\sin x-Ae^x\cos x+$$

$$+Be^x\sin x+Be^x\cos x+Be^x\cos x-Be^x\sin x.$$

$$y'' - 3y' = e^x\left(\sin x + \cos x\right),$$

$$\begin{array}{l|l} 1\cdot y'' & -2A\sin x + 2B\cos x, \\ \hline -3\cdot y' & -3A\cos x + 3A\sin x - 3B\sin x - 3B\cos x, \\ \hline 0\cdot y & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \sin x & -2A + 3A - 3B = 1,\ \ A - 3B = 1, \\ \hline \cos x & 2B - 3A - 3B = 1,\ -3A - B = 1. \end{array}$$

$$\begin{cases} A - 3B = 1; \\ -B - 3A = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 + 3B; \\ -B - 3\left(1 + 3B\right) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 + 3B; \\ -10B = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5}; \\ B = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

$v = -\dfrac{1}{5}e^x\cos x - \dfrac{2}{5}e^x\sin x$ – *частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

$y = u + v = c_1 + c_2e^{3x} - \dfrac{1}{5}e^x\cos x - \dfrac{2}{5}e^x\sin x$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.*

2. Найти частное решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = -x,\ y(1) = \dfrac{1}{2};$

Решение:

$xy' + y = -x$ – *линейное дифференциальное уравнение первого порядка.*

Замена: $y = uv,\ y' = u'v + uv',$

$xu'v + xuv' + uv = -x,$

$xu'v + u(xv' + v) = -x,$

$$\begin{cases} xv' + v = 0; \\ xu'v = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} xv' + v = 0; \\ u'v = -1. \end{cases}$$

$xv' + v = 0, \qquad xv' = -v,$

$x\dfrac{dv}{dx} = -v, \qquad \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}, \qquad \int\dfrac{dv}{v} = -\int\dfrac{dx}{x},$

$\ln|v| = -\ln|x| + c,\ c = 0, \qquad \ln|v| = -\ln|x|, \qquad v = \dfrac{1}{x}.$

$u'v = -1, \quad u'\dfrac{1}{x} = -1, \quad u' = -x,$

$$\frac{du}{dx} = -x, \qquad du = -xdx,$$

$$\int du = -\int xdx, \qquad u = -\frac{x^2}{2} + c.$$

$y = uv = \left(-\frac{x^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{x}$ – *общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка*.

При $y(1) = \frac{1}{2}$, получим:

$$\frac{1}{2} = \left(-\frac{1^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{1}, \qquad \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + c, \qquad c = 1,$$

$y = \left(-\frac{x^2}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{x}$ – *частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка*.

b) $y'' - 3y' = 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$

Решение:

$y'' - 3y' = 2x$ – *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$y = u + v$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' - 3y' = 0$ – *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.*

$r^2 - 3r = 0$ – *характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*.

$r_1 = 0,\ r_2 = 3$ – *корни характеристического уравнения*.

$u = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x}, \quad u = c_1 + c_2 e^{3x}$ – *общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$f(x) = 2x,\ \alpha = 0,\ k = 1,\ v(x) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

$$v = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx,$$

$$v' = 2Ax + B,$$

$$v'' = 2A.$$

$$y'' - 3y' = 2x,$$

$$\begin{array}{r|l} 1 \cdot y'' & 2A, \\ \hline -3 \cdot y' & -6Ax - 3B, \\ \hline 0 \cdot y & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -6A = 2,\ A = -\dfrac{1}{3}, \\ \hline x^0 & 2A - 3B = 0,\ -\dfrac{2}{3} - 3B = 0,\ B = -\dfrac{2}{9}. \end{array}$$

$v = -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x$ – *частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.

$y = u + v = c_1 + c_2 e^{3x} - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x$ – *общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*.

При $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$, получим:

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x, \qquad y' = 3c_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9},$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2; \\ 4 = 3c_2 - \dfrac{2}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = c_1 + c_2; \\ c_2 = \dfrac{38}{18}; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{9}; \\ c_2 = \dfrac{19}{9}. \end{cases}$$

$y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{19}{9}e^{3x} - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x$ – *частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $\begin{cases} x' = -x + 5y; \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

Решение:

$$x' = -x + 5y, \qquad \frac{x' + x}{5} = y,$$

$$x'' = -x' + 5y',$$

$$x'' = -x' + 5\left(x + 3y\right),$$

$$x'' = -x' + 5\left(x + 3 \cdot \frac{x' + x}{5}\right),$$

$$x'' = -x' + 5x + 3x' + 3x,$$

$$x'' - 2x' - 8x = 0,$$
$$r^2 - 2r - 8 = 0, \qquad r_1 = 4,\ r_2 = -2\ ,$$
$$x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t},$$
$$y = \frac{x' + x}{5} = \frac{4c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{-2t} + c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}}{5} = \frac{5c_1 e^{4t} - c_2 e^{-2t}}{5} =$$
$$= c_1 e^{4t} - \frac{c_2 e^{-2t}}{5}.$$
$$\begin{cases} x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}; \\ y = c_1 e^{4t} - \dfrac{c_2 e^{-2t}}{5}. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x' = -4x - 6y; \\ y' = -4x - 2y. \end{cases}$

Решение:

$$x' = -4x - 6y, \quad \frac{x' + 4x}{-6} = y,$$
$$x'' = -4x' - 6y',$$
$$x'' = -4x' - 6\left(-4x - 2y\right),$$
$$x'' = -4x' - 6\left(-4x - 2 \cdot \left(\frac{x' + 4x}{-6}\right)\right),$$
$$x'' = -4x' - 6\left(-4x + \frac{x' + 4x}{3}\right),$$
$$x'' = -4x' + 24x - 2x' - 8x,$$
$$x'' + 6x' - 16x = 0,$$
$$r^2 + 6r - 16 = 0, \qquad r_1 = 2,\ r_2 = -8\ ,$$
$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-8t},$$
$$y = \frac{x' + 4x}{-6} = \frac{2c_1 e^{2t} - 8c_2 e^{-8t} + 4c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-8t}}{-6} = \frac{6c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{-8t}}{-6} =$$
$$= -c_1 e^{2t} + \frac{2c_2 e^{-8t}}{3}.$$
$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-8t}; \\ y = -c_1 e^{2t} + \dfrac{2c_2 e^{-8t}}{3}. \end{cases}$$

4. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $\begin{cases} x' = 5x + 3y; \\ y' = -3x - y. \end{cases}$ При $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Решение:

$$x' = 5x + 3y, \qquad \frac{x' - 5x}{3} = y,$$

$$x'' = 5x' + 3y',$$

$$x'' = 5x' + 3(-3x - y),$$

$$x'' = 5x' + 3\left(-3x - \frac{x' - 5x}{3}\right),$$

$$x'' = 5x' - 9x - x' + 5x,$$

$$x'' - 4x' + 4x = 0,$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0, \qquad r_1 = 2,\ r_2 = 2\ ,$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t},$$

$$y = \frac{x' - 5x}{3} = \frac{2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 te^{2t} - 5c_1 e^{2t} - 5c_2 te^{2t}}{3} =$$

$$= \frac{-3c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} - 3c_2 te^{2t}}{3} = -c_1 e^{2t} + \frac{c_2 e^{2t}}{3} - c_2 te^{2t}.$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t}; \\ y = -c_1 e^{2t} + \frac{c_2 e^{2t}}{3} - c_2 te^{2t}. \end{cases}$$

При $x(0) = 2,\ y(0) = 1$:

$$\begin{cases} 2 = c_1; \\ 1 = -c_1 + \frac{c_2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2; \\ 1 = -2 + \frac{c_2}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 2; \\ c_2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} + 9te^{2t}; \\ y = -2e^{2t} + 3e^{2t} - 9te^{2t}. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x' = y; \\ y' = -x. \end{cases}$ При $x(0) = 3,\ y(0) = 2$.

Решение:

$x' = y$,

$x'' = y'$,

$x'' = -x$,

$x'' + x = 0$,

$r^2 + 1 = 0$,

$r_1 = i,\ r_2 = -i$,

$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\quad y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$.

$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t; \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$

При $x(0) = 3,\ y(0) = 2$:

$\begin{cases} 3 = c_1; \\ 2 = c_2; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 3\cos t + 2\sin t; \\ y = -3\sin t + 2\cos t. \end{cases}$

§ 6. Ряды

Литература: основная: [1-3], [5], [7]; дополнительная: [10]; методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда. Свойства рядов.
2. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточное условие расходимости ряда.
3. Определение обобщенного гармонического ряда. Сходимость обобщенного гармонического ряда.
4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: I признак сравнения, II (предельный) признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.
5. Определение знакочередующегося ряда. Признак Лейбница для исследования на сходимость знакочередующихся рядов.
6. Понятие знакопеременного ряда. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Определение абсолютно сходящегося ряда, условно сходящегося ряда.
7. Определение степенного ряда. Определение точки сходимости, области сходимости степенного ряда.

Примерные практические задания (задачи)

1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+n)^2}{(3n+2)!}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+n)^2}{(3n+2)!}$ *– знакоположительный числовой ряд.*

Используем признак Даламбера.

$$a_n=\frac{(2+n)^2}{(3n+2)!},\ a_{n+1}=\frac{(2+n+1)^2}{(3(n+1)+2)!}=\frac{(n+3)^2}{(3n+5)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+3)^2}{(3n+5)!}\cdot\frac{(3n+2)!}{(n+2)^2}=\frac{(n+3)^2}{(3n+2)!\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)\cdot(3n+5)}\cdot\frac{(3n+2)!}{(n+2)^2}=$$

$$=\frac{(n+3)^2}{(3n+3)\cdot(3n+4)\cdot(3n+5)\cdot(n+2)^2}=$$

$$= \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{n\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdot n\left(3+\frac{4}{n}\right)\cdot n\left(3+\frac{5}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{n^3\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{5}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{n^3\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{5}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем радикальный признак Коши.

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n,\ \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n} = \frac{n+1}{2n}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+18)\sqrt[5]{\left(\ln(n+18)\right)^6}}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+18)\sqrt[5]{\left(\ln(n+18)\right)^6}}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем интегральный признак Коши.

$$f(x) = \frac{1}{(x+18)\sqrt[5]{\left(\ln(x+18)\right)^6}},$$

$$f(1)=\frac{1}{(1+18)\sqrt[5]{\left(\ln(1+18)\right)^6}}=\frac{1}{19\sqrt[5]{\left(\ln 19\right)^6}},$$

$$f(2)=\frac{1}{(2+18)\sqrt[5]{\left(\ln(2+18)\right)^6}}=\frac{1}{20\sqrt[5]{\left(\ln 20\right)^6}},$$

$$f(3)=\frac{1}{(3+18)\sqrt[5]{\left(\ln(3+18)\right)^6}}=\frac{1}{21\sqrt[5]{\left(\ln 21\right)^6}}$$ и т. д.

$f(x)=\frac{1}{(x+18)\sqrt[5]{\left(\ln(x+18)\right)^6}}$ – непрерывная, монотонно убывающая функция на промежутке $[1;+\infty)$, значит, можем применить интегральный признак Коши.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+18)\sqrt[5]{\left(\ln(x+18)\right)^6}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(x+18)\sqrt[5]{\left(\ln(x+18)\right)^6}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\ln(x+18)=t,\\ \dfrac{dx}{x+18}=dt,\\ \begin{array}{c|c|c}x & 1 & b\\ \hline t & \ln 19 & \ln(b+18)\end{array}\end{array}\right]=\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 19}^{\ln(b+18)}\frac{dt}{\sqrt[5]{t^6}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt[5]{t}}\Bigg|_{\ln 19}^{\ln(b+18)}=$$

$$=-5\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{\ln(b+18)}}-\frac{1}{\sqrt[5]{\ln 19}}\right)=0=const$$ – несобственный интеграл второго рода сходится, значит, исходный ряд сходится.

4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)\left(\ln\left(\ln(n+2)\right)\right)}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)\left(\ln\left(\ln(n+2)\right)\right)}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем интегральный признак Коши.

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)\left(\ln\left(\ln(x+2)\right)\right)},$$

$$f(1)=\frac{1}{(1+2)\ln(1+2)\left(\ln\left(\ln(1+2)\right)\right)}=\frac{1}{3\ln 3\left(\ln\left(\ln 3\right)\right)},$$

$$f(2)=\frac{1}{(2+2)\ln(2+2)\left(\ln\left(\ln(2+2)\right)\right)}=\frac{1}{4\ln 4\left(\ln\left(\ln 4\right)\right)},$$

$$f(3)=\frac{1}{(3+2)\ln(3+2)\left(\ln\left(\ln(3+2)\right)\right)}=\frac{1}{5\ln 5\left(\ln\left(\ln 5\right)\right)}$$ и т. д.

$f(x)=\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)\left(\ln\left(\ln(x+2)\right)\right)}$ – непрерывная, монотонно убывающая функция на промежутке $[1;+\infty)$, значит, можем применить интегральный признак Коши.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)\left(\ln\left(\ln(x+2)\right)\right)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{d\left(\ln\left(\ln(x+2)\right)\right)}{\ln\left(\ln(x+2)\right)}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\left(\ln\left(\ln(x+2)\right)\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln\left(\ln\left(\ln(b+2)\right)\right)-\ln\left(\ln\left(\ln 3\right)\right)=\infty\neq const$$

– несобственный интеграл второго рода расходится, значит, исходный ряд расходится.

5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем признак сравнения.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – *обобщенный гармонический ряд, сходится, так как* $p=2>1.$

$$a_n-b_n=\frac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^4+n^3+n^2-n^2-n^4-2}{\left(n^2+n^4+2\right)n^2}=\frac{n^3-2}{\left(n^2+n^4+2\right)n^2}>0,$$

$a_n>b_n$ при $n\geq 2$.

$a_n=\frac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}>b_n=\frac{1}{n^2}$, следовательно, данный признак ответа не дает.

Используем предельный признак сравнения.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n^4+2}\cdot\dfrac{n^2}{1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4+n^3+n^2}{n^2+n^4+2}=1\neq 0$, значит, оба ряда сходятся.

6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+3}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+3}$ – *знакочередующийся числовой ряд.*

Используем признак Лейбница.

$a_n=\dfrac{n}{n^2+3},\ a_{n+1}=\dfrac{n+1}{(n+1)^2+3},$

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+1}{(n+1)^2+3}-\dfrac{n}{n^2+3}=\dfrac{n^3+n^2+3n+3-n^3-2n^2-4n}{\left((n+1)^2+3\right)\left(n^2+3\right)}=$

$=\dfrac{-n^2-n+3}{\left((n+1)^2+3\right)\left(n^2+3\right)}=\dfrac{-\left(n^2+n-3\right)}{\left((n+1)^2+3\right)\left(n^2+3\right)}<0,\quad a_{n+1}<a_n$ при $n\geq 2$.

Последовательность, составленная из абсолютных величин монотонно убывает.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2+3}=0$.

Условия признака Лейбница выполняются, следовательно, ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+3}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем предельный признак сравнения.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+3}:\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2+3}\cdot\dfrac{n}{1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+3}=1\neq 0$, значит, оба ряда расходятся.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+3}$ – *ряд сходится условно.*

7. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\left(n+1\right)}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\left(n+1\right)}$ – *знакочередующийся числовой ряд.*

Используем обобщенный достаточный признак сходимости.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n+1\right)}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем признак Даламбера.

$a_n=\frac{1}{2^n\left(n+1\right)}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\left(n+2\right)}$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2^{n+1}\left(n+2\right)}\cdot\frac{2^n\left(n+1\right)}{1}=\frac{n+1}{2\left(n+2\right)}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2\left(n+2\right)}=\frac{1}{2}<1$, следовательно, ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\left(n+1\right)}$ – *ряд сходится абсолютно.*

8. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\cdot\left(31+n^2\right)}{2n^3+32}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\cdot\left(31+n^2\right)}{2n^3+32}$ – *знакочередующийся числовой ряд.*

Используем признак Лейбница.

$a_n=\frac{n\cdot\left(31+n^2\right)}{2n^3+32}=\frac{31n+n^3}{2n^3+32}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{31n+n^3}{2n^3+32}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{31}{n^2}+1}{2+\frac{32}{n^2}}=0,5\neq 0$.

Одно из условий признака Лейбница не выполняется, следовательно, ряд расходится.

9. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{18^n}{(3n+18)!}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{18^n}{(3n+18)!}$ – *знакочередующийся числовой ряд.*

Используем обобщенный достаточный признак сходимости.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{18^n}{(3n+18)!}$ – *знакоположительный числовой ряд.*

Используем признак Даламбера.

$a_n=\dfrac{18^n}{(3n+18)!},\ a_{n+1}=\dfrac{18^{n+1}}{(3n+21)!},$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{18^{n+1}}{(3n+21)!}\cdot\dfrac{(3n+18)!}{18^n}=\dfrac{18}{(3n+19)(3n+20)(3n+21)},$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{18}{(3n+19)(3n+20)(3n+21)}=0<1$, следовательно, ряд сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{18^n}{(3n+18)!}$ – *ряд сходится абсолютно.*

10. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-2)^3(2x+8)^{2n}}{2n+3}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(2x+8)^{2n}}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(n-2)^3(x+4)^{2n}}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-2)^3(x+4)^{2n}}{2n+3},$$

$$a_n=\frac{4^n(n-2)^3}{2n+3},\ a_{n+1}=\frac{4^{n+1}(n+1-2)^3}{2(n+1)+3}=\frac{4^{n+1}(n-1)^3}{2n+5}.$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{4^n(n-2)^3}{2n+3}}{\frac{4^{n+1}(n-1)^3}{2n+5}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{4^n(n-2)^3(2n+5)}{(2n+3)4^{n+1}(n-1)^3}\right|=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n-2)^3\left(2n+5\right)}{4\left(2n+3\right)(n-1)^3}\right| = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^4\left(1-\frac{2}{n}\right)^3\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^4\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^3\left(2+\frac{5}{n}\right)}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}\right| = \frac{1}{4}\frac{\left(1-0\right)^3\left(2+0\right)}{\left(2+0\right)\left(1-0\right)^3} = \frac{1}{4}.$$

Центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0 = -4$. Ряд абсолютно сходится, если $x \in \left(-\frac{17}{4};-\frac{13}{4}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -\frac{17}{4}$, получаем знакоположительный числовой ряд (начиная с третьего члена):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-2)^3\left(-\frac{17}{4}+4\right)^{2n}}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-2)^3\left(-1\right)^{2n}}{4^{2n}\left(2n+3\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{4^n\left(2n+3\right)},$$

который сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1-2)^3}{4^{n+1}\left(2n+2+3\right)}\cdot\frac{4^n\left(2n+3\right)}{(n-2)^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^3\left(2n+3\right)}{4\left(2n+5\right)(n-2)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\left(2+\frac{3}{n}\right)}{4n^4\left(2+\frac{5}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^3} = \frac{1}{4} < 1.$$

При $x = -\frac{13}{4}$, получаем знакоположительный числовой ряд (начиная с третьего члена):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-2)^3\left(-\frac{13}{4}+4\right)^{2n}}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-2)^3 3^{2n}}{4^{2n}\left(2n+3\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(n-2)^3}{4^n\left(2n+3\right)},$$ который расходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9^{n+1}(n+1-2)^3}{4^{n+1}\left(2n+2+3\right)}\cdot\frac{4^n\left(2n+3\right)}{9^n(n-2)^3}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{9(n-1)^3\cdot\left(2n+3\right)}{4\left(2n+5\right)\cdot(n-2)^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{9n^4\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)}{4n^4\left(2+\frac{5}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^3}=\frac{9}{4}>1.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $x\in\left[-\frac{17}{4};-\frac{13}{4}\right)$, центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0=-4$, радиус сходимости равен $R=\frac{1}{4}$.

11. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-5x+15\right)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-5x+15\right)^{2n}}{n\cdot 9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{2n}5^{2n}\left(x-3\right)^{2n}}{n\cdot 9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n\left(x-3\right)^{2n}}{n\cdot 9^n},\quad a_n=\frac{25^n}{n\cdot 9^n},$$

$$a_{n+1}=\frac{25^{n+1}}{\left(n+1\right)\cdot 9^{n+1}}=\frac{25\cdot 25^n}{9\cdot 9^n\cdot\left(n+1\right)}.$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{25^n}{9^n\cdot n}}{\frac{25\cdot 25^n}{9\cdot 9^n\cdot\left(n+1\right)}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{25^n\cdot 9\cdot 9^n\cdot\left(n+1\right)}{9^n\cdot n\cdot 25\cdot 25^n}\right|=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{9\cdot(n+1)}{n\cdot 25}\right| == \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{9}{25}.$$

Центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0 = 3$. Ряд абсолютно сходится, если $x \in \left(\frac{66}{25};\frac{84}{25}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = \frac{66}{25}$, получаем знакоположительный числовой ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n\left(\frac{66}{25}-3\right)^{2n}}{n\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n\cdot 9^{2n}(-1)^{2n}}{25^{2n}\cdot n\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{25^n\cdot n}$, который расходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{9^n}{25^n\cdot n}\cdot\frac{25^{n+1}\cdot(n+1)}{9^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{25\cdot(n+1)}{9n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{25}{9} > 1.$$

При $x = \frac{84}{25}$, получаем знакоположительный числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n\left(\frac{84}{25}-3\right)^{2n}}{n\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n\cdot 9^{2n}}{25^{2n}\cdot n\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{25^n\cdot n},$$ который расходится по признаку Даламбера (решение смотри выше).

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $x \in \left(\frac{66}{25};\frac{84}{25}\right)$, центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0 = 3$, радиус сходимости равен $R = \frac{9}{25}$.

12. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8-2x)^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8-2x)^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}2^{1+n}(n+2)^n(x-4)^{1+n}}{(n+9)^n},$$

$$a_n=\frac{2^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}.$$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+9}{2^{\frac{1}{n}+1}(n+2)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}.$$

Центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0=3$. Ряд абсолютно сходится, если $x\in\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=\frac{7}{2}$, получаем знакоположительный числовой ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(8-2\cdot\frac{7}{2}\right)^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+9)^n}$, который расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+9)^n}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+9}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{n+9}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{n+9}\right)^{\left(\frac{n+9}{-7}\right)\left(\frac{-7}{n+9}\right)n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{-7n}{n+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{-7}\neq 0.$$

При $x=\frac{9}{2}$, получаем знакочередующийся числовой ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(8-2\cdot\frac{9}{2}\right)^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}(n+2)^n}{(n+9)^n}$, который расходится по признаку Лейбница, так как не выполняется одно из условий:

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+9)^n} = [1^\infty] = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+9}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{n+9}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-7}{n+9}\right)^{\left(\frac{n+9}{-7}\right)\left(\frac{-7}{n+9}\right)n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-7n}{n+9}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = e^{-7} \neq 0.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $x \in \left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$, центр сходимости степенного ряда расположен в точке $x_0 = 4$, радиус сходимости равен $R = \frac{1}{2}$.

§ 7. Основы теории вероятностей и математической статистики

Литература: основная: [2], [3], [5], [7], [8]; дополнительная: [9], [11]; методические разработки кафедры: [12-14].

Теоретические вопросы

1. Определение испытания, события, случайного события. Виды событий.
2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности. Статистическое определение вероятности.
3. Формулы комбинаторики.
4. Операции над событиями. Вероятность суммы и произведения событий.
5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Понятие независимых испытаний. Схема Бернулли. Формула Бернулли.
7. Определение случайной величины. Виды случайных величин: дискретные и непрерывные.
8. Понятие закона распределения случайной величины.
9. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
10. Определение генеральной и выборочной совокупности.
11. Ряды распределения. Понятие полигона и гистограммы.
12. Статистическое распределение выборки. Числовые характеристики статистического распределения.

Примерные практические задания (задачи)

1. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность, что сумма выпавших очков не меньше девяти.

   Решение:

   Общее число возможных элементарных исходов равно $n = 6 \cdot 6 = 36$.

   Число благоприятствующих исходов m равно числу исходов вида: (3+6), (4+5), (4+6), (5+4), (5+5), (5+6), (6+3), (6+4), (6+5) и (6+6), то есть $m = 10$. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
2. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

   Решение:

   Обозначим события A – {цель поражена первым стрелком}, B – {цель поражена вторым стрелком}. Так как события независимые и совместные, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

   $P(A+B) = 0,9 + 0,85 - 0,9 \cdot 0,85 = 0,985$.

3. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым – 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Решение:

Обозначим событие A – {цель поражена первым стрелком}, B – {цель поражена вторым стрелком}. Так как события независимые, то

$$P(C) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(B) \cdot P(\overline{A}) = 0,95 \cdot (1 - 0,80) + 0,80 \cdot (1 - 0,95) = 0,23.$$

4. Из полного набора костей домино наудачу берут пять. Найти вероятность того, что среди отобранных костей будет хотя бы одна кость с шестеркой (событие A).

Решение:

Событие $\overline{A}$ – взятые пять костей не содержат ни одной шестерки.

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} \approx 0,207,\ P(A) = 1 - 0,207 = 0,793 \approx 0,8.$$

5. В электрическую цепь параллельно включены три независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05; 0,1; 0,2. Найти вероятность того, что в цепи не будет тока.

Решение:

Обозначим A_1 – {отказ первого элемента}, A_2 – {отказ второго элемента}, A_3 – {отказ третьего элемента}, A – {отсутствие тока в цепи}. При параллельном включении ток в цепи отсутствует при выходе из строя всех трех элементов. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, и так как по условию задачи события независимые, то $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$. Следовательно, $P(A) = 0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,001$.

6. На сборку поступают детали с трех автоматов, производительность которых относится как 5:3:2. Первый автомат в среднем дает 1 % брака, второй – 2 %, третий – 1,5 %. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной?

Решение:

Событие A – взятая наудачу деталь окажется стандартной. Рассмотрим гипотезы H_i – деталь изготовлена на i-*м* автомате, где $i = 1, 2, 3.$

Тогда $P(H_1) = 0,5, P(H_2) = 0,3, P(H_3) = 0,2$ (это следует из производительности автоматов). Из условия задачи $P(A / H_1) = 0,99, P(A / H_2) = 0,98, P(A / H_3) = 0,985$. Поскольку все H_i составляют полную группу событий, а событие A может произойти только с наступлением одной из гипотез, то применима формула полной вероятности: $P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3)$, $P(A) = 0,5 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,985 = 0,986$.

7. В первой урне 3 черных и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых шара и 6 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался черным. Какова вероятность того, что этот шар вынули из второй урны?

Решение:

Вероятность события A – {вынутый шар черный} вычисляется по формуле полной вероятности, вероятность того, что черный шар вынут из первой урны $P(H_1)=\frac{1}{2}$, черный шар вынут из второй урны $P(H_2)=\frac{1}{2}$.

Соответствующие условные вероятности $P(A/H_1)=\frac{3}{10}$ и $P(A/H_2)=\frac{6}{10}$, тогда $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{20}$.

Теперь по формуле Бейеса можно вычислить вероятность того, что черный шар вынут из второй урны:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{9}{20}}=\frac{2}{3}.$$

8. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Найти вероятность того, что в срок не будут погашены 3 кредита.

Решение:

Воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, где $n=5$, $k=3$, $p=0{,}1$ и $q=0{,}9$.

Следовательно, $P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^2=0{,}0081$.

9. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	1	4	6
p	0,25	0,20	0,55

Записать функцию распределения вероятностей для этой случайной величины.

Решение:

По определению $F(x)=P(X<x)=\sum_{X_i<X}P(X=x_i)$. Тогда:

a) при $x\le 1$, $F(x)=P(X<1)=0$;

b) при $1<x\le 4$, $F(x)=P(X=1)=0{,}25$;

c) при $4<x\le 6$, $F(x)=P(X=1)+P(X=4)=0{,}25+0{,}25=0{,}45$;

d) при $x>6$,

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 6) = 0,25 + 0,25 + 0,55 = 1.$$

Следовательно, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0,25, & 1 < x \le 4; \\ 0,45, & 4 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$

10. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	– 1	2	3
p	0,2	0,5	0,3

Найти моду дискретной случайной величины.

Решение:

модой M_0 дискретной случайной величины называют ее значение, которое имеет наибольшую вероятность, то есть $M_0 = 2$.

11. Дискретная случайная величина принимает значения: 1; 2; 1; 2; 1; 3; 5. Найти медиану дискретной случайной величины.

Решение:

Составим ранжированный ряд: 1; 1; 1; 2; 2; 3; 5. Количество значений нечетное, значит, $n = 2k + 1$ и $m_e = x_{k+1}$.

$n = 2k + 1;$ $\quad 7 = 2k + 1;$ $\quad 2k = 6;$ $\quad k = 3.$

$m_e = x_{k+1};$ $\quad m_e = x_{3+1} = x_4 = 2.$

12. Дискретная случайная величина принимает значения: 3; 3; 1; 2; 1; 3. Найти медиану дискретной случайной величины.

Решение:

Составим ранжированный ряд: 1; 1; 2; 3; 3; 3. Количество значений четное, значит, $n = 2k$ и $m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$n = 2k;$ $\quad 6 = 2k;$ $\quad k = 3.$

$m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2};$ $\quad m_e = \dfrac{x_3 + x_{3+1}}{2} = \dfrac{x_3 + x_4}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5.$

13. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения вероятностей:

X	1	3
p	0,2	0,8

$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,8 = 2,6$ – *математической ожидание случайной величины X.*

$M(X^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,8 = 7,4$ – *математической ожидание случайной величины* X^2.

$M^2(X) = 2,6^2 = 6,76$ – *квадрат математического ожидания случайной величины X.*

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 7,4 - 6,76 = 0,64$ – *дисперсия случайной величины X.*

$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$ – *среднее квадратическое отклонение случайной величины X.*

14. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	– 2	4	7
p	0,1	0,5	0,4

Найти математическое ожидание этой величины.

Решение:

Математическое ожидание случайной величины вычисляется по формуле: $M[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

$$M[x] = -2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,4 = 4,6.$$

15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3
p	0,2	0,8

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Решение:

Среднее квадратическое отклонение дискретной величины вычисляется по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D[X]}$.

$$D[X] = 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,8 - (1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,8)^2 = 0,64.$$

Следовательно, $\sigma(X) = \sqrt{0,64} = 0,8.$

16. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 50$. Найти несмещенную оценку математического ожидания.

x_i	11	12	14	15
n_i	4	19	20	7

Решение:

Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле: $\overline{X}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$.

$$\overline{X}_в = \frac{11 \cdot 4 + 12 \cdot 19 + 14 \cdot 20 + 15 \cdot 7}{50} = 13,14.$$

17. Проведено пять измерений без систематических ошибок некоторой случайной величины (*мм*): 2,1; 2,3; x_3; 2,7; 2,9. Найти x_3, если несмещенная оценка математического ожидания равна 2,48.

Решение:

Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле: $\overline{X}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$.

$24,8 = \frac{2,1 \cdot 1 + 2,3 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + 2,7 \cdot 1 + 2,9 \cdot 1}{5}$. Следовательно, $x_3 = 2,40$.

18. По выборке объемом $n = 10$ найдена выборочная дисперсия $D_в = 3,6$. Найти исправленное среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Исправленное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$s = \sqrt{S^2}\text{, где } S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в,\ s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в}\ .$$

Следовательно, $s = \sqrt{\frac{10}{10-1} \cdot 3,6} = 2,0$.

19. Измерение площадей выгорания местности представлено выборкой:

1	4	8	7	6
7	8	7	6	5
4	1	7	4	6
4	6	5	8	6
6	5	8	6	1

Составьте: вариационный ряд, статистический ряд частот и относительных частот, накопительных частот, интервальный ряд. *Постройте* полигон частот и кумуляту для статистического ряда. *Найдите для статистического ряда*: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, среднее выборочное квадратичное отклонение, моду, медиану, размах.

Найдите для интервального ряда: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, среднее выборочное квадратичное отклонение. *Постройте* гистограмму для интервального ряда.

Решение:

1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8 – *вариационный ряд.*

Статистический ряд частот (относительных частот)

X	1	4	5	6	7	8	$\sum$
n_i	3	4	3	7	4	4	$\sum_{i=1}^{k} n_i = 25$
ω_i	0,12	0,16	0,12	0,28	0,16	0,16	$\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$
W_i	3	7	10	17	21	25	Накопительные частоты

Полигон частот

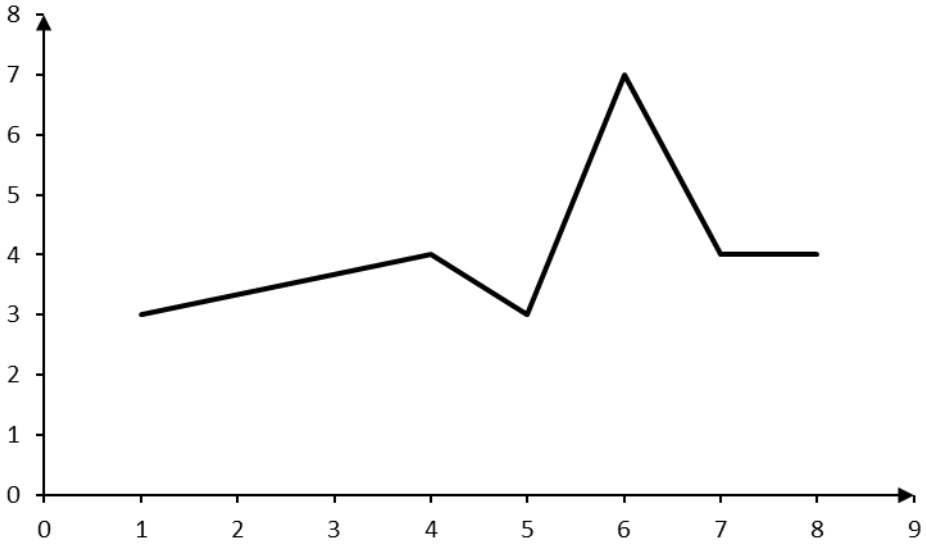


Рисунок 23

Полигон относительных частот

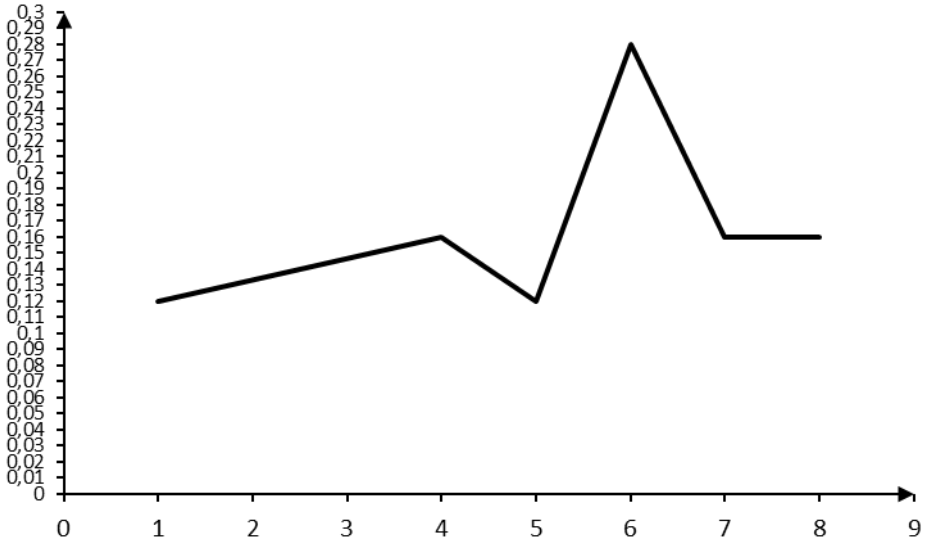


Рисунок 24

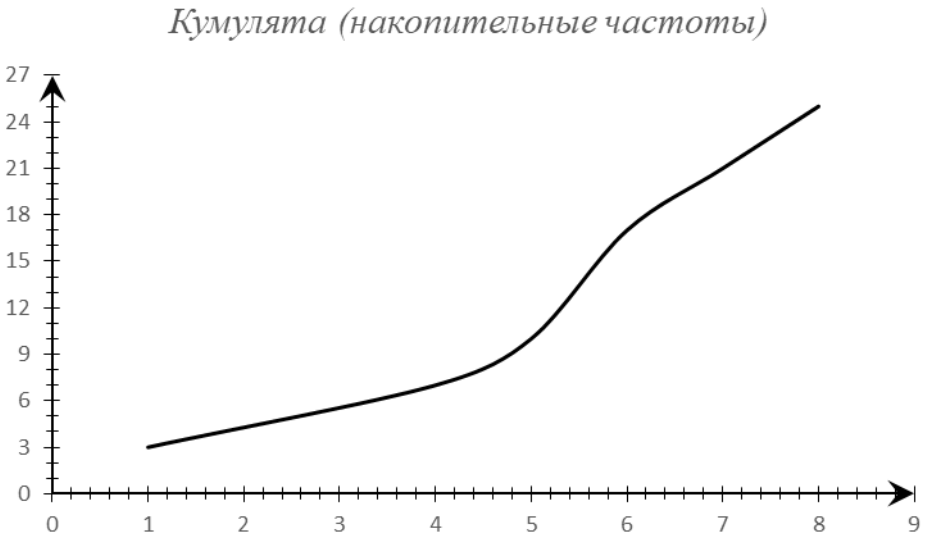


Рисунок 25

Количество значений нечетное.

$n = 2k+1,\ 25 = 2k+1,\ 2k = 24,\ k = 12,\ m_e = x_{k+1},\ m_e = x_{12+1} = x_{13} = 6$ – *медиана случайной величины.*

$M_0 = 6$ – *мода случайной величины.*

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{1\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 7 + 7\cdot 4 + 8\cdot 4}{25} = \frac{136}{25} = 5,44$$ – *выборочное среднее для статистического ряда частот (математическое ожидание).*

x_i	$x_i - \overline{X}_B$	$\left(x_i - \overline{X}_B\right)^2$	n_i	$\left(x_i - \overline{X}_B\right)^2 \cdot n_i$
1	-4,44	19,7136	3	59,1408
4	-1,44	2,0736	4	8,2944
5	-0,44	0,1936	3	0,5808
6	0,56	0,3136	7	2,1952
7	1,56	2,4336	4	9,7344
8	2,56	6,5536	4	26,2144
Сумма				106,16

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{106,16}{25} = 4,2464$$ – *выборочная дисперсия для статистического ряда частот (дисперсия).*

$\delta = \sqrt{D_B} \approx 2,0607$ – *среднее квадратическое отклонение (среднее выборочное квадратичное отклонение).*

$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{25}{24} \cdot 4,2464 \approx 4,423$ – *исправленная дисперсия.*

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B} \approx 2{,}103$ – *исправленное среднее квадратическое отклонение.*

Краткий теоретический материал

Для построения интервального ряда необходимо:

1. Определить *величину* (*количество*) частичных интервалов.
2. Определить *ширину* (*шаг*) интервалов.
3. Установить для каждого интервала его *верхнюю* и *нижнюю границы*.
4. Сгруппировать результаты наблюдении.

1. Вопрос о выборе числа и ширины интервалов группировки приходится решать в каждом конкретном случае исходя из *целей* исследования, *объема* выборки и *степени варьирования* признака в выборке.

Приблизительно число интервалов *k* можно оценить исходя только из объема выборки *n* одним из следующих способов:

- по формуле *Стержеса*: $k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg n$, где *n* объем выборки;
- с помощью таблицы 1.

Таблица 1

Объем выборки, *n*	25-40	40-60	60-100	100-200	Больше 200
Число интервалов, *k*	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

2. Обычно предпочтительны интервалы одинаковой ширины. Для определения ширины интервалов *h* вычисляют:

- *размах варьирования R* – значений выборки: $R = x_{\max} - x_{\min}$, где x_{max} и x_{min} – максимальная и минимальная варианты выборки;
- ширину каждого из интервалов *h* определяют по следующей формуле: $h = \frac{R}{k}$.

3. *Нижняя граница* первого интервала x_{h_1} выбирается так, чтобы минимальная варианта выборки x_{min} попадала примерно в середину этого интервала: $x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2}$.

Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала *h*:

$x_i = x_{i-1} + h$.

Построение шкалы интервалов на основе вычисления границ интервалов продолжается до тех пор, пока величина x_{h_i} удовлетворяет соотношению: $x_i < x_{max} + \frac{h}{2}$.

4. В соответствии со шкалой интервалов производится группирование значений признака – для каждого частичного интервала вычисляется сумма частот n_i вариант, попавших в *i*-й интервал. При этом в интервал включают значения случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы интервала (в верхние не включаются, а переносятся в следующий интервал, за исключением последнего интервала).

Гистограмма

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной *h*, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i / h.

Площадь *i-го* частичного прямоугольника равна $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$ – сумме частот вариант *i-го* интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки***.**

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной *h*, а высоты равны отношению ω_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии ω_i / h.

Площадь *i-го* частичного прямоугольника равна $\frac{\omega_i}{h} \cdot h = \omega_i$ – относительной частоте вариант попавших в *i-й* интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице***.**

$R = x_{\max} - x_{\min} = 8 - 1 = 7$ – *размах выборки.*

$k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg\ 25 \approx 5{,}64116 \approx 6$ – *количество интервалов.*

$h = \frac{R}{K} = \frac{7}{6} \approx 1{,}2$ – *ширина интервала.*

$x_{нач} = x_{h_1} = x_{min} - \frac{h}{2} = 1 - \frac{1,2}{2} = 0,4$ – *начальное значение первого интервала.*

Интервальный ряд

$x_i ; x_{i+1}$	0,4;1,6	1,6;2,8	2,8;4,0	4,0;5,2	5,2;6,4	6,4;7,6
n_i	3	0	0	7	7	8
$h_i = n_i / h$	3/1,2	0	0	7/1,2	7/1,2	8/1,2

Гистограмма частот

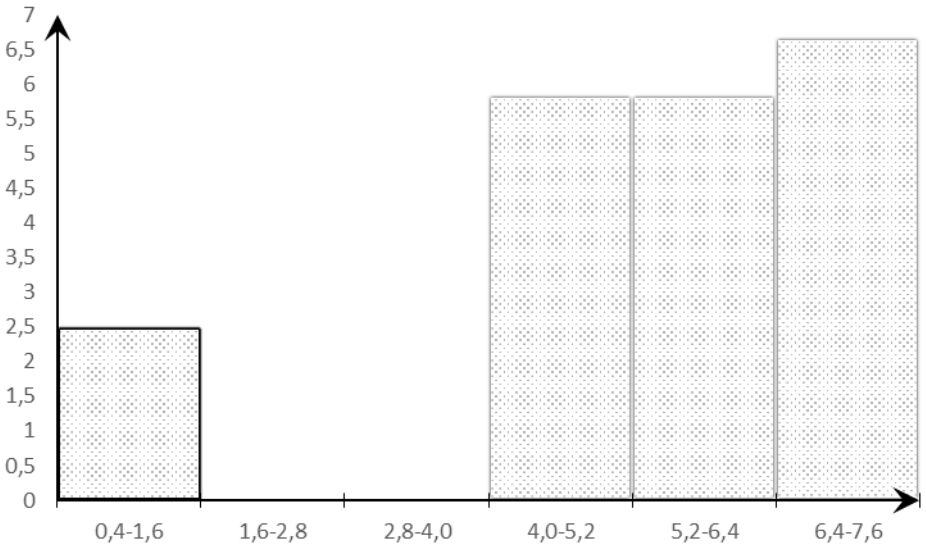


Рисунок 26

$x_i ; x_{i+1}$	0,4;1,6	1,6;2,8	2,8;4,0	4,0;5,2	5,2;6,4	6,4;7,6
m_i	1	2,2	3,4	4,6	5,8	7
n_i	3	0	0	7	7	8
$m_i \cdot n_i$	3	0	0	32,2	40,6	56

$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot n_i}{n} = \frac{3 + 0 + 0 + 32,2 + 40,6 + 56}{25} = \frac{167}{25} = 6,68$ – *выборочное среднее для интервального ряда.*

m_i	$m_i - \bar{X}_B$	$\left(m_i - \bar{X}_B\right)^2$	n_i	$\left(m_i - \bar{X}_B\right)^2 \cdot n_i$
1	-5,68	32,2624	3	96,7872
2,2	-4,48	20,0704	0	0
3,4	-3,28	10,7584	0	0
4,6	-2,08	4,3264	7	30,2848
5,8	-0,88	0,7744	7	5,4208
7	0,32	0,1024	8	0,8192
Сумма				133,312

$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(m_i - \overline{x_B}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{133,312}{25} = 5,33248$ – *выборочная дисперсия для интервального ряда.*

$\delta = \sqrt{D_B} \approx 2,30922$ – *среднее квадратическое отклонение для интервального ряда.*

Литература

Основная литература

1. Баранова, Е. С. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Баранова, Н. В. Васильева, В. П. Федотов. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2013. – 400 с.
2. Журбенко, Л. Н. Математика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонова, Н. В. Никонова, С. Н. Нуриева, О. М. Дегтярева. – М. : ИНФРА-М, 2011. – 372 с.
3. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2014. – 608 с.
4. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] : учеб. пособие / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
5. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] : учеб. пособие / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 592 с.
6. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для вузов. – в 2-х т. / Н. С.Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. Т. 1. - 416 с.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для вузов. – в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. Т. 2. - 544 с.
8. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике / В. С. Шипачев. - 9-е изд.. – М. : Высш. шк., 2009. – 304 с. : ил.

Дополнительная литература

9. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высшее образование, 2008. – 404 с.
10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс [Текст] : учеб. пособие / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2013. – 608 с.
11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам [Текст] : учеб. пособие / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

Методические разработки кафедры

12. Худякова С. А. Высшая математика [Текст] : методические рекомендации по дисциплине. Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность. Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность / сост. С. А. Худякова, А. В. Шпаньков, Л. В. Якупова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВО «Уральский институт ГПС МЧС России», 2019. – 80 с. 2020. – 23 с.

13. Худякова С. А. Высшая математика [Текст]: методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся. Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность. Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность / сост. С. А. Худякова, А. В. Шпаньков, Л. В. Якупова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВО «Уральский институт ГПС МЧС России», 2020. – 87 с.
14. Худякова С. А. Высшая математика [Текст] : методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам. Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность. Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность / сост. С. А. Худякова, А. В. Шпаньков, Л. В. Якупова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВО Уральский институт ГПС МЧС России, 2020. – 103 с.

Светлана Александровна Худякова
Лидия Вячеславовна Якупова
Андрей Владимирович Шпаньков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам

Специальность 20.05.01 Пожарная безопасность
Направление подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность

Редактор
Подписано в печать
Тираж экз.
Объем учет.-изд. л. Бумага писчая
Редакционно-издательский отдел
Уральского института ГПС МЧС России
Екатеринбург, ул. Мира, 22